LA TRASFORMATA DI FOURIER: PROPRIETA' ED ESEMPI

Proprieta' della TDF (1)

LINEARITA': la TDF della combinazione lineare (somma pesata) di due segnali e' uguale alla combinazione lineare delle TDF dei due segnali.

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\text{TDF}} a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

SIMMETRIA: la TDF di una segnale reale gode di simmetria complessa coniugata. La parte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine (sono "pari"), la parte immaginaria e la fase sono antisimmetriche rispetto all'origine (sono "dispari").

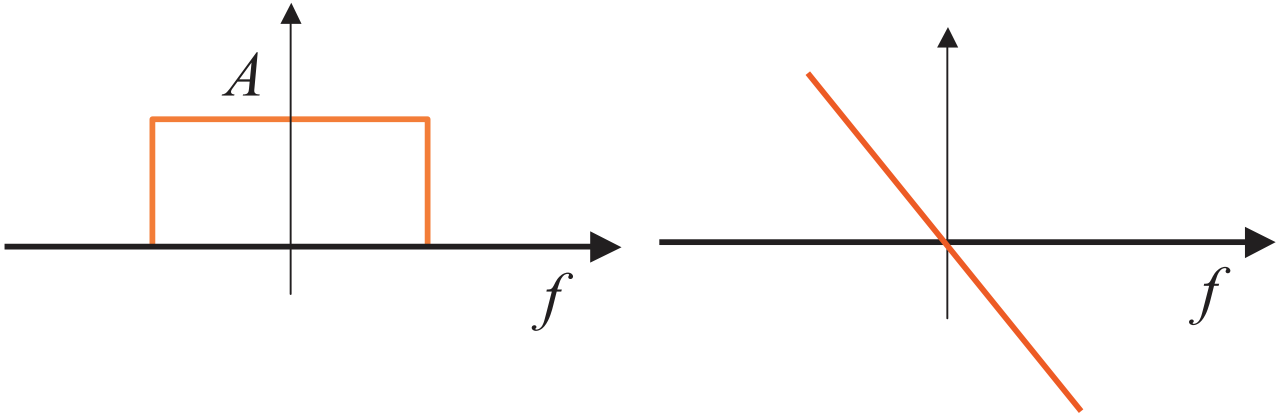
$$x(t) \quad \text{reale} \xrightarrow{\text{TDF}} \begin{cases} X(f) = X^*(-f) \\ Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\} \\ Im\{X(f)\} = - Im\{X(-f)\} \\ |X(f)| = |X(-f)| \\ fase\, X(f) = - fase\, X(-f) \end{cases}$$

Proprieta' della TDF (2)

TDF di una segnale reale

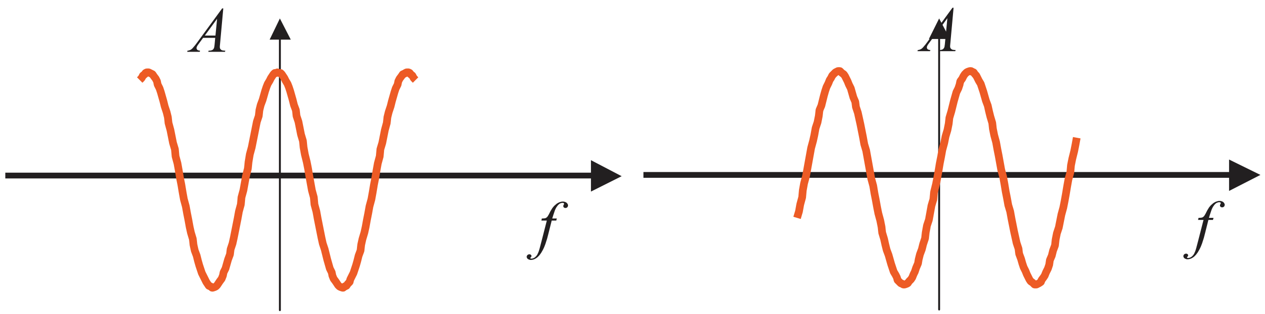
Modulo

Fase



Parte reale

Parte immag.



Casi particolari

$x(t)$ reale pari → TDF → $X(f)$ reale pari

$x(t)$ reale dispari → TDF → $X(f)$ immaginario dispari

Proprieta' della TDF (3)

Valori nell'origine: la TDF in *f=0* e' uguale all'integrale del segnale nei tempi. Il segnale in *t=0* e' uguale all'integrale della TDF nelle frequenze.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt; \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df;$$

Dualita': dato il segnale *x(t)* e la sua TDF *X(f)*, vale la seguente relazione duale:

$$X(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} x(f)$$

Scalatura:

$$x(at) \xrightarrow{\text{TDF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$x(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f)$$

Proprieta' della TDF (4)

Traslazione nei tempi: la TDF del segnale ritardato e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per un esponenziale complesso

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{TDF}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Traslazione nelle frequenze: traslare in frequenza la TDF del segnale equivale a moltiplicare il segnale nei tempi per un esponenziale complesso

$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TDF}} X(f-f_0)$$

Derivazione nei tempi: la TDF del segnale derivato nel tempo e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per $j2\pi f$:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{j2\pi f\, X(f)}$$

Proprieta' della TDF (5)

Moltiplicazione nelle frequenze: la TDF inversa del prodotto delle TDF di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione dei segnali nei tempi. L'integrale di convoluzione e' un operatore utilizzato, per esempio, per descrivere come vengono modificati i segnali quando passano attraverso sistemi lineari tempo-invarianti.

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad X(f)H(f)$$

Moltiplicazione nei tempi: la TDF del prodotto di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione delle due TDF (nelle frequenze).

$$x(t)y(t) \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) Y(f-\xi) d\xi$$

Proprieta' della TDF (6)

Relazione di Parseval: l'energia di un segnale e' uguale all'integrale del modulo quadrato della sua TDF

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ integrata su tutto l'asse delle frequenze fornisce l'energia del segnale.

$|X(f)|^2$ *df* rappresenta l'energia del segnale in ogni intervallo di frequenze

infinitesimo *df*.

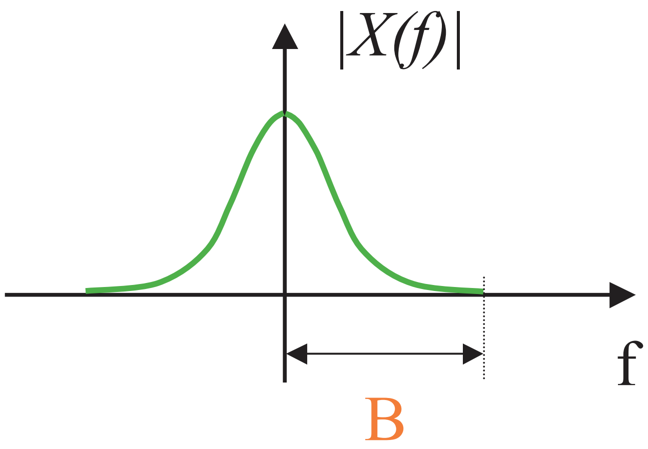
$|X(f)|^2$ viene detta DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA

Banda di un segnale

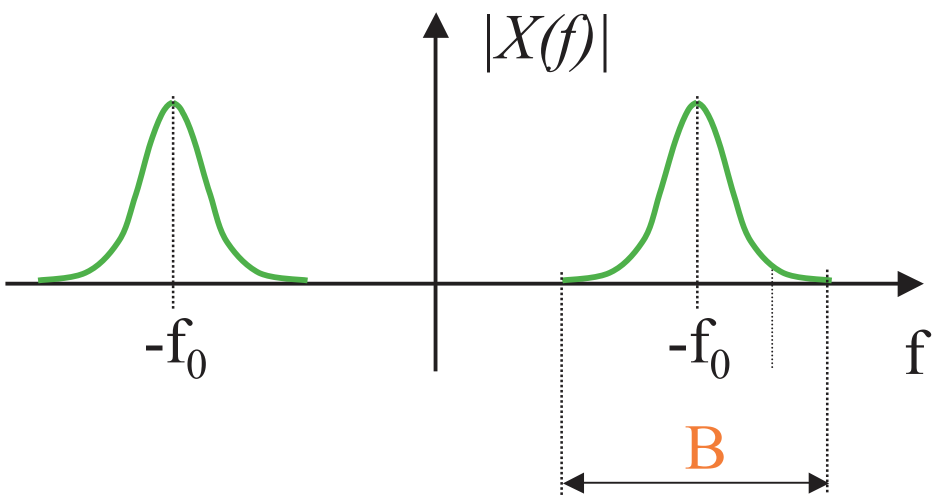
Viene definita **banda (B) del segnale x(t)** l'intervallo di frequenze (misurato sul semiasse positivo) all'interno del quale *X(f)* assume valori diversi da 0. Molto spesso *X(f)* è a rigore diversa da 0 da $-\infty$ a ∞. In questo caso la banda corrisponde all'intervallo di frequenza in cui *X(f)* è "significativamente" diversa da 0.

Operativamente, nella definizione di banda, si considerano due classi di segnali:

Segnali di tipo passa-basso
$X(f)$ concentrata intorno a $f=0$



Segnali di tipo passa-banda
$X(f)$ concentrata intorno a $f=\pm f_0$



La trasformata di Fourier del coseno

Un impulso di area unitaria in frequenza ha come TDF inversa una costante unitaria nei tempi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \exp\{j2\pi\ ft\}\, df = 1$$

Quindi, per dualita', la TDF di una costante unitaria e' un impulso nelle frequenze.

La trasformata di Fourier del coseno si ricava da quella della costante utilizzando le proprieta' di traslazione nelle frequenze e di linearita':

$$x(t) = \cos(2\pi\ f_o t) = \frac{1}{2}\exp\{j2\pi\ f_o t\} + \frac{1}{2}\exp\{-j2\pi\ f_o t\}$$

TDF

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$$

La trasformata di Fourier del seno

La trasformata di Fourier del seno si ricava da quella della costante utilizzando le proprieta' di traslazione nelle frequenze e di linearita':

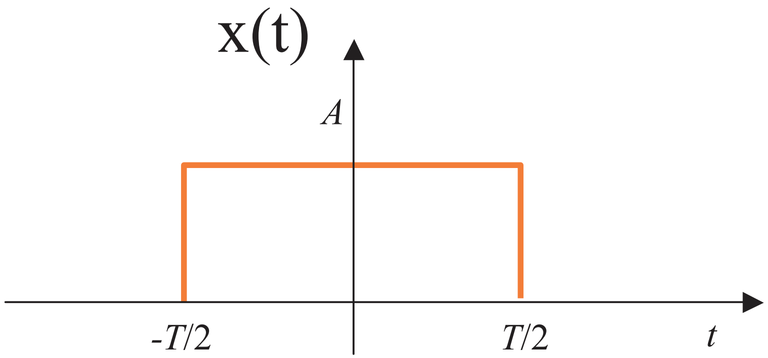
$$x(t) = \sin(2\pi\ f_o t) = \frac{j}{2}\exp\{-j2\pi\ f_o t\} - \frac{j}{2}\exp\{j2\pi\ f_o t\}$$

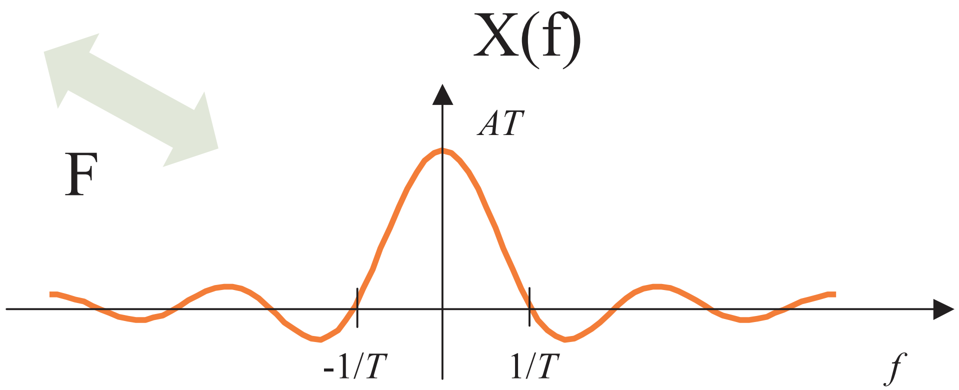
$$\Big\Downarrow \text{ TDF}$$

$$X(f) = \frac{j}{2}\delta(f + f_o) - \frac{j}{2}\delta(f - f_o)$$

Esempi di trasformata di Fourier (il rettangolo)

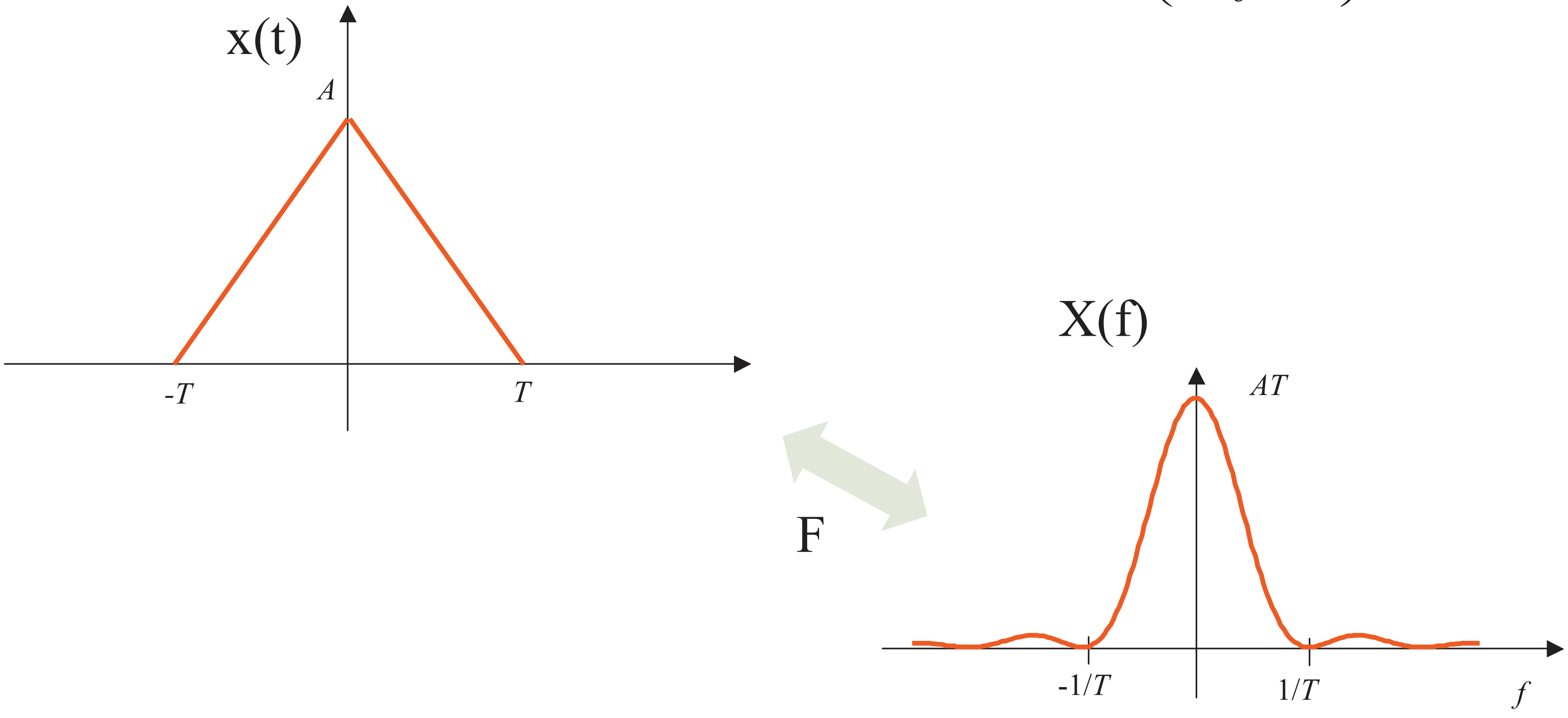
$$x(t) = A\ rect_T(t) = \begin{cases} A & |t| \le T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT \cdot \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$





Esempi di trasformata di Fourier (il triangolo)

$$x(t) = A\, tri_{2T}(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2$$

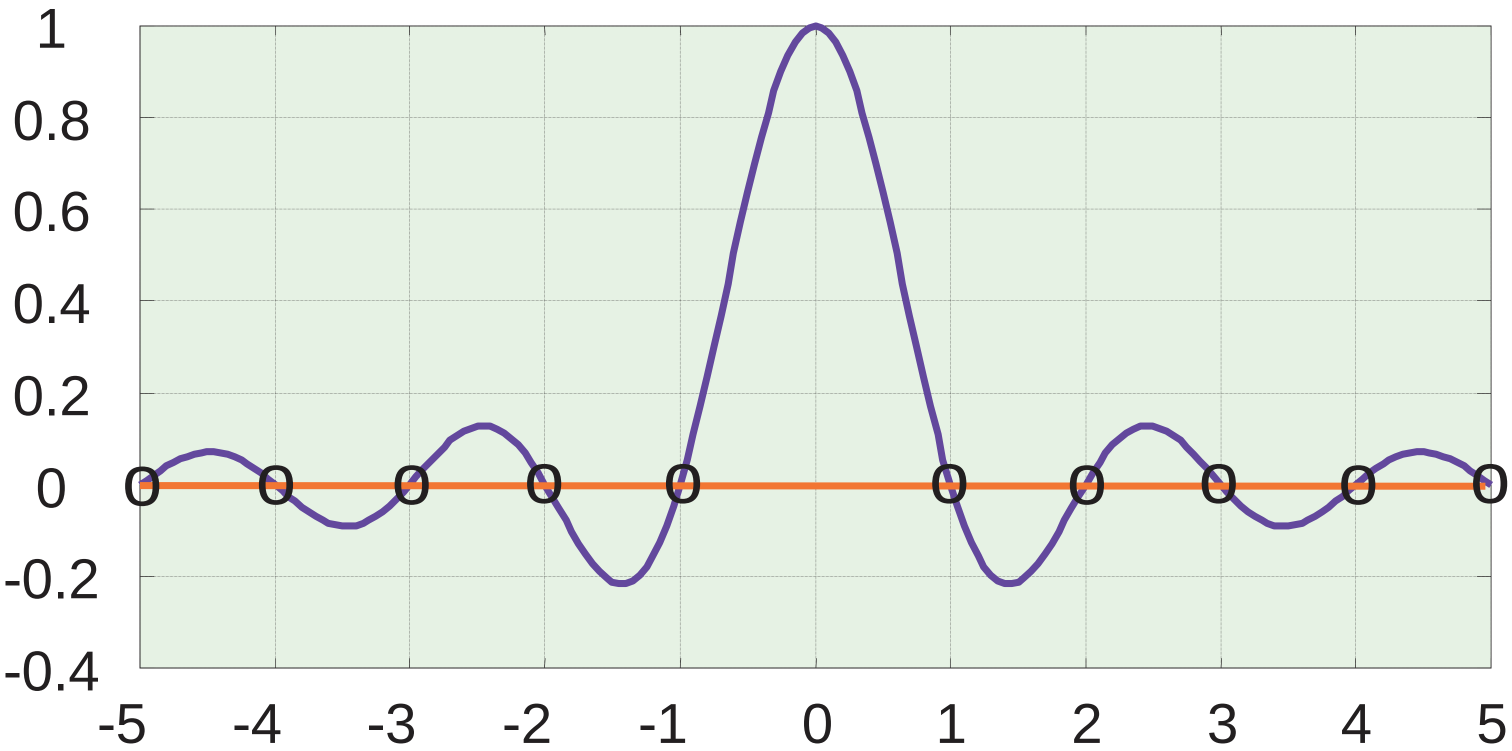


Seno cardinale

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi\, t}{\pi\, t}$$

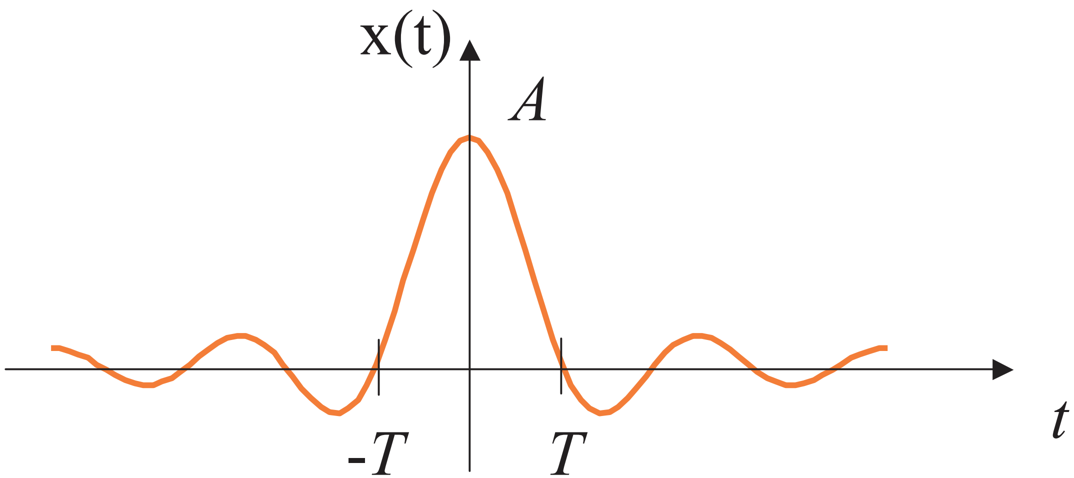
$$E = 1$$

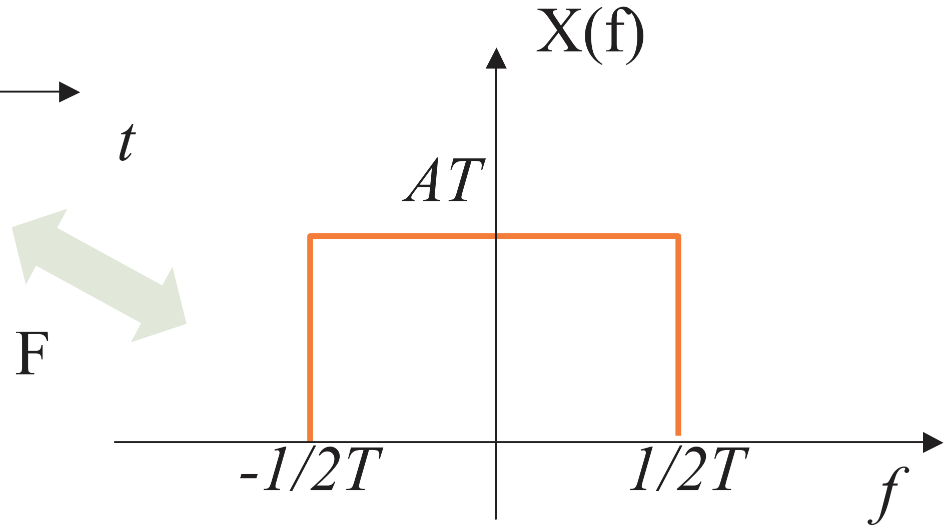
Si annulla per tutti i valori interi di t tranne nell'origine, dove ha valore unitario



Esempi di trasformata di Fourier (il sinc)

$$x(t) = A\frac{\sin \pi \frac{t}{T}}{\pi \frac{t}{T}} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT\, rect_{1/T}(f) = \begin{cases} A & |f| \le \dfrac{1}{2T} \\ 0 & |f| > \dfrac{1}{2T} \end{cases}$$

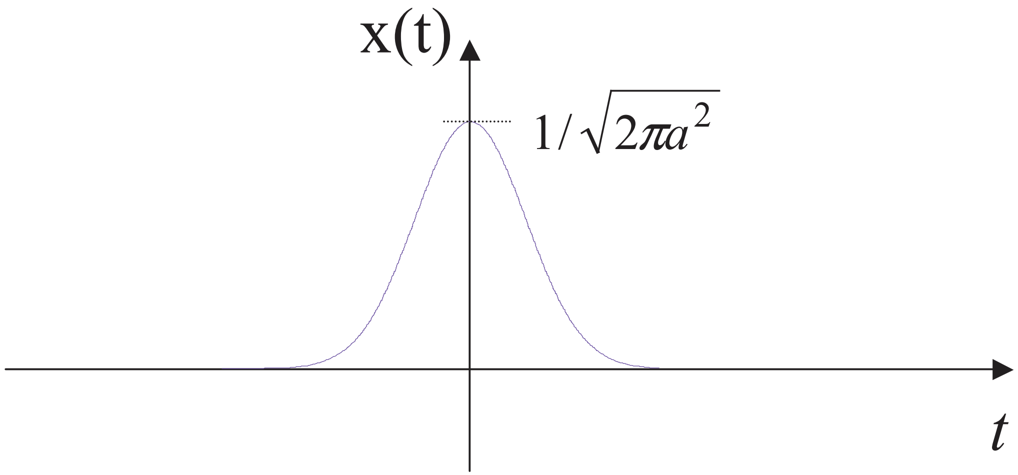


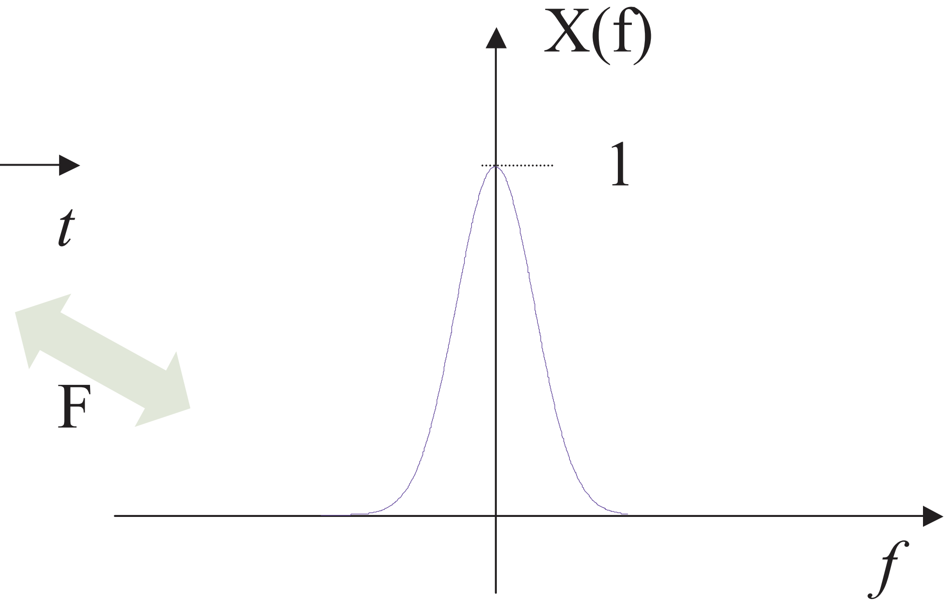


Esempi di trasformata di Fourier (la gaussiana)

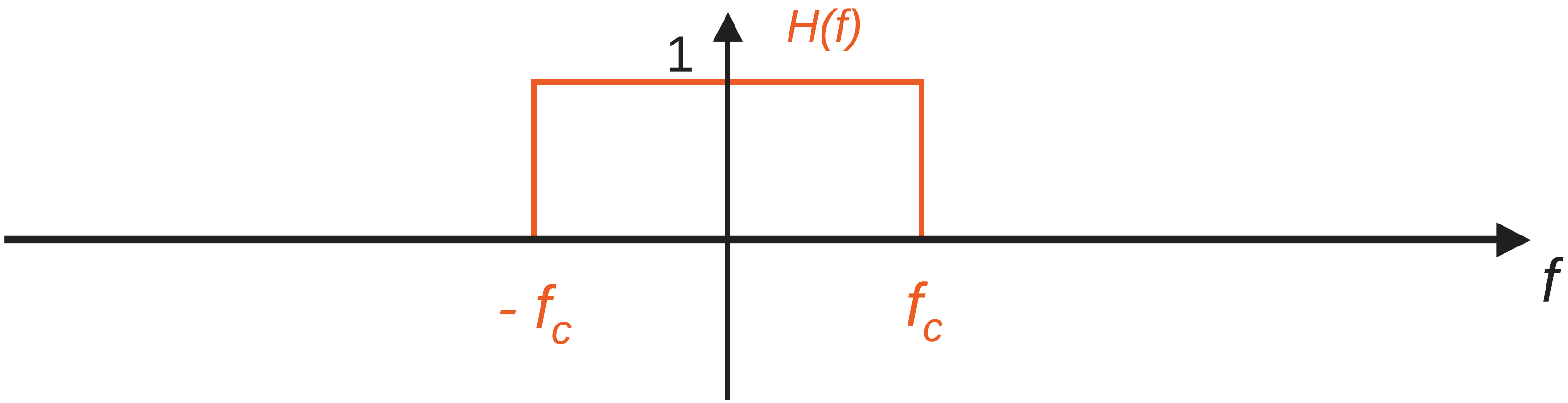
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{2a^2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \exp\left\{-\frac{f^2}{2b^2}\right\}$$

$$b = \frac{1}{2\pi\, a}$$





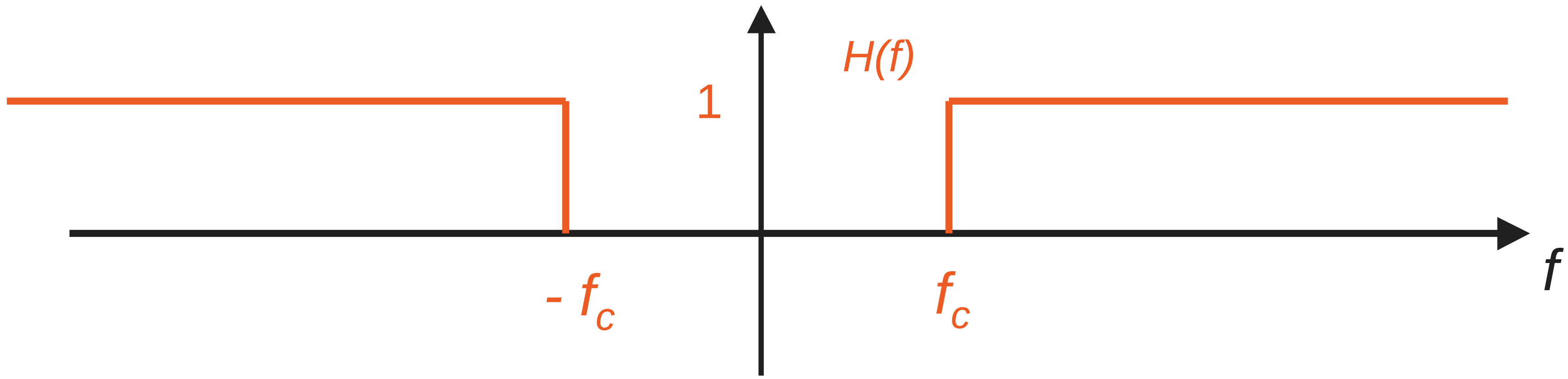
Risposta in frequenza del filtro passa-basso ideale



La risposta all'impulso e' un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di $1/2f_c$

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi f_c t}{\pi t}$$

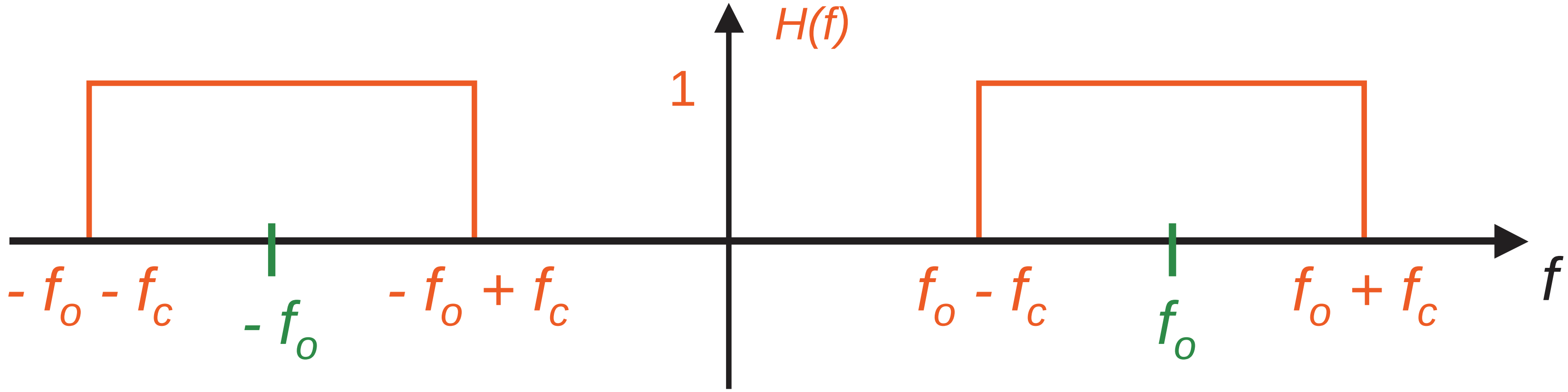
Risposta in frequenza del filtro passa-alto ideale



La risposta all'impulso e' data da un impulso di area unitaria $\delta(t)$ meno un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di $1/2f_c$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{\sin 2\pi f_c t}{\pi t}$$

Risposta in frequenza del filtro passa-banda ideale



La risposta all'impulso e' quindi data da un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di $1/\,2f_c$ moltiplicato per $2\cos(2\pi f_0 t)$.

$$h(t) = 2\frac{\sin 2\pi f_c t}{\pi\ t}\cos\left(2\pi f_o t\right)$$