SEGNALI STAZIONARI: ANALISI SPETTRALE

Analisi spettrale: rappresentazione delle componenti in frequenza di un segnale (ampiezza vs. frequenza).

Fornisce maggiori dettagli rispetto all'analisi temporale (ampiezza vs. tempo).

Particolarmente utile nelle applicazioni biomediche per segnali quasi periodici (es: cuore, respiro, voce, ecc.).

Spettro: Vettore delle ampiezze delle componenti di un segnale, disposte in funzione della loro frequenza. Un segnale è in teoria rappresentato da una serie infinita di sinusoidi.

Come si stima lo spettro:

<u>Metodo tradizionale</u> (non parametrico): Trasformata di Fourier.

<u>Metodo parametrico</u>: basato su modelli (lineari) del segnale.

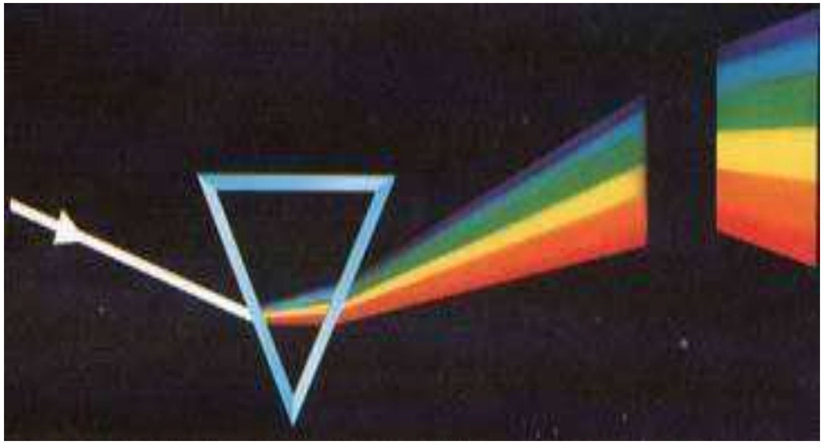
Perchè l'analisi in frequenza?

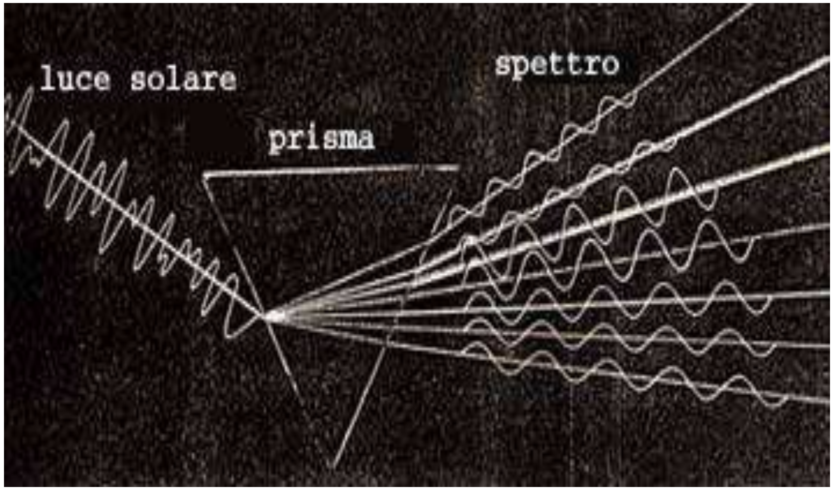
Ad esempio, in ottica, alcuni colori (rosso, giallo, blu), detti fondamentali, sono puri, cioè non ulteriormente scomponibili.

A ciascuno di essi corrisponde una certa lunghezza d'onda (frequenza) del raggio luminoso, e il prisma (che scompone la luce bianca nei sette colori dello spettro luminoso) mostrerà solamente quella componente.

La medesima cosa avviene per gli altri segnali.

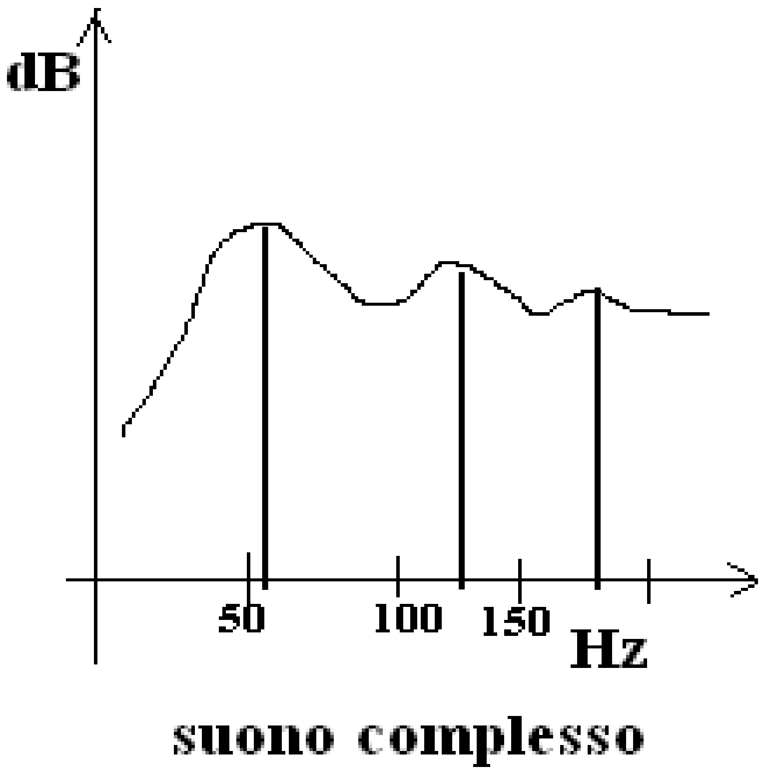
Es: il suono. A una certa lunghezza d'onda del suono corrisponde una certa "altezza" percepita. Se non è presente contemporaneamente nessun altra frequenza, il suono sarà puro.



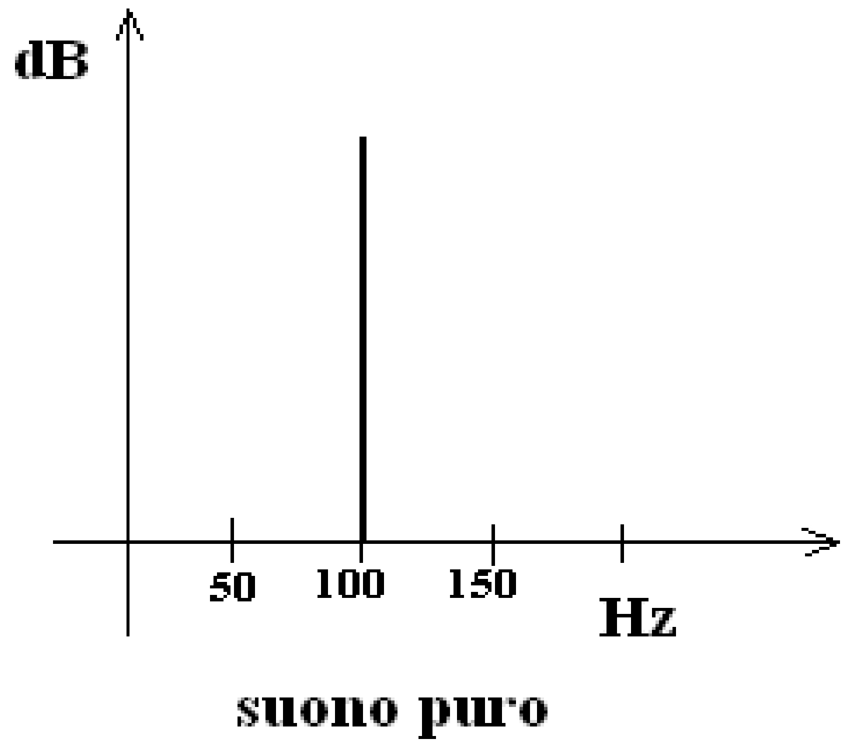


SPETTRO

ES: SUONO - Ogni singola componente è un tono puro (sinusoidale: y = sin(x)).



3 componenti: 55Hz,125Hz,180Hz



1 componente: 100Hz

ANALISI DI FOURIER

Qualunque segnale periodico può essere scomposto nella somma di un eventuale termine costante e di componenti sinusoidali, delle quali la prima, avente lo stesso periodo e quindi la stessa frequenza del segnale considerato, si chiama prima armonica o fondamentale:

$$a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$$

e le altre, aventi periodi sottomultipli e quindi frequenze multiple, si chiamano armoniche superiori:

$$a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

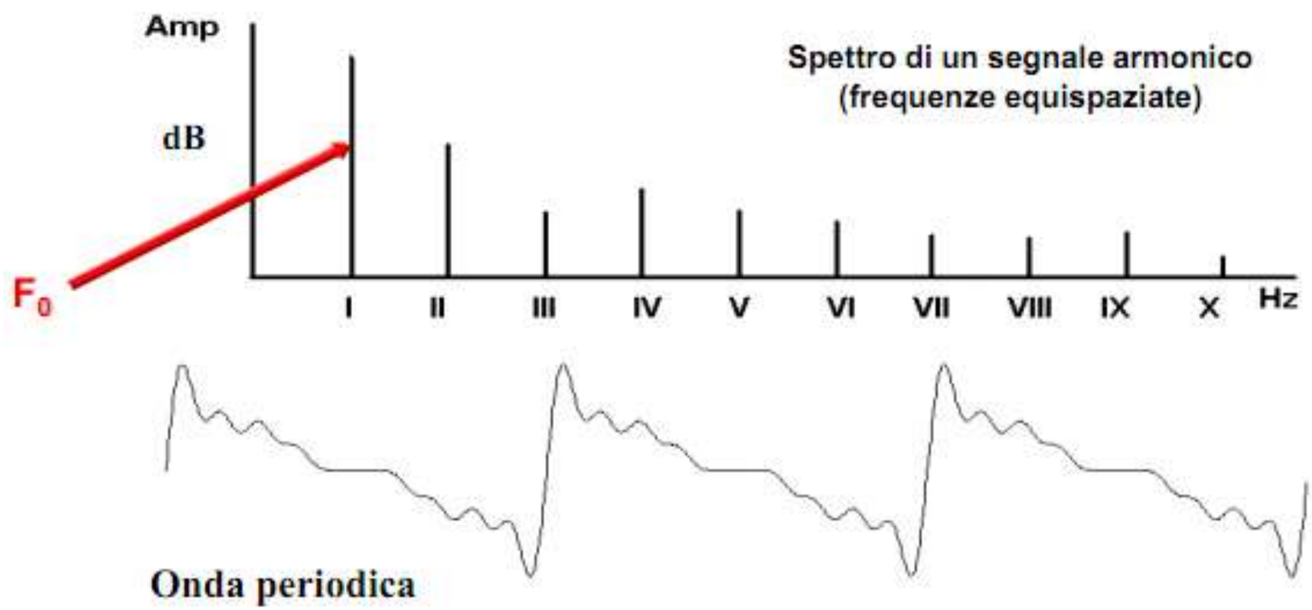
In altri termini, con opportune interferenze (somme) di onde più semplici si può ricostruire l'onda originale (es: onda sonora).

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos m\omega_0 t + b_m \sin m\omega_0 t \right)$$

Analisi di Fourier: rappresenta con una serie di armoniche, ciascuna dotata di una particolare ampiezza (e fase), qualsiasi forma d'onda.

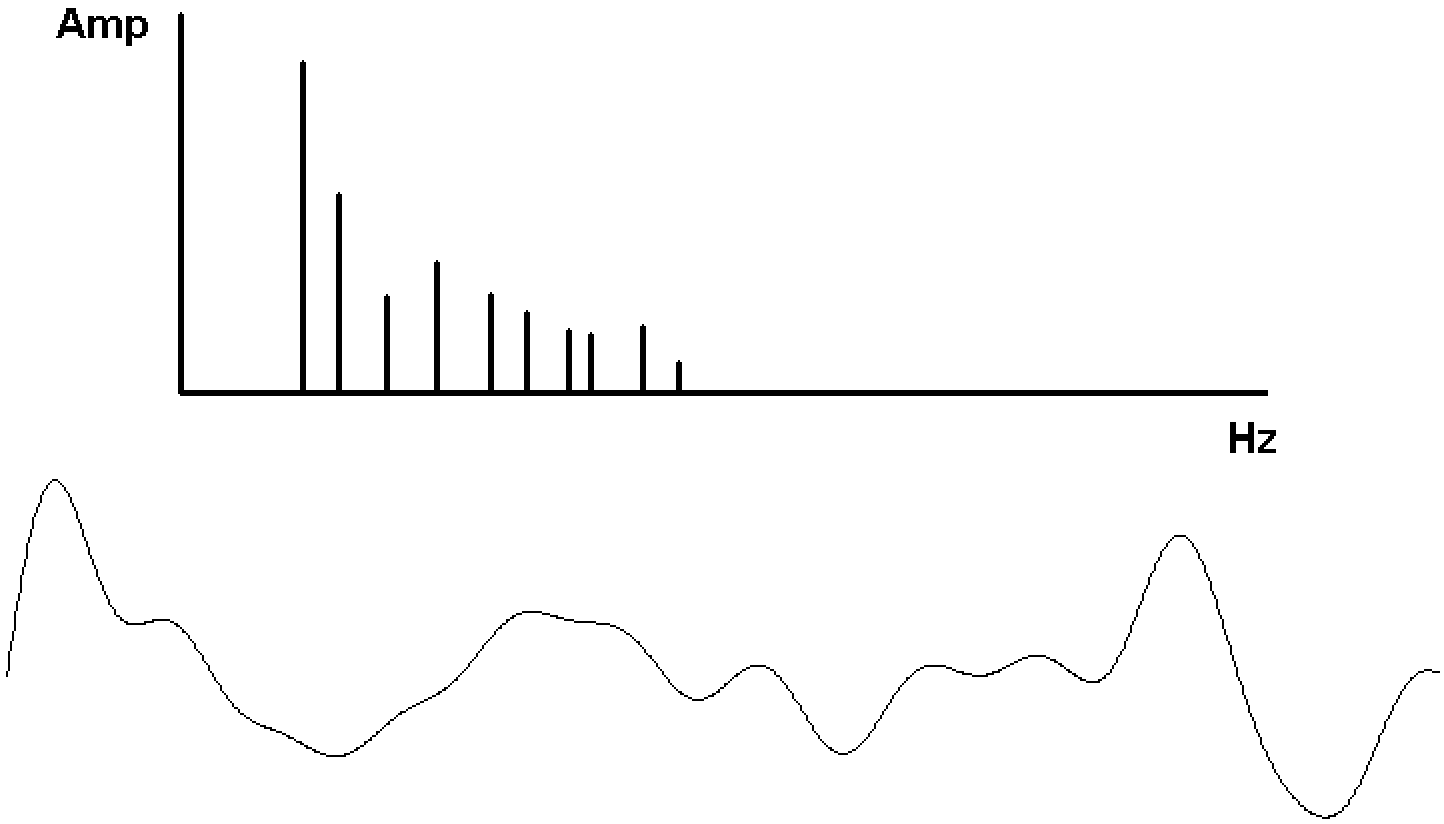
ARMONICHE

Se le componenti sono in rapporto di frequenza intero con la componente di frequenza più bassa, si dicono armoniche. La componente a frequenza più bassa si chiama **fondamentale o prima armonica** e si indica con $\mathbf{F_0}$.
La componente di frequenza doppia della fondamentale si chiama seconda armonica (y = sin(2x)), la componente di frequenza tripla della fondamentale si chiama terza armonica (y = sin(3x)), e così via.



RUMORE

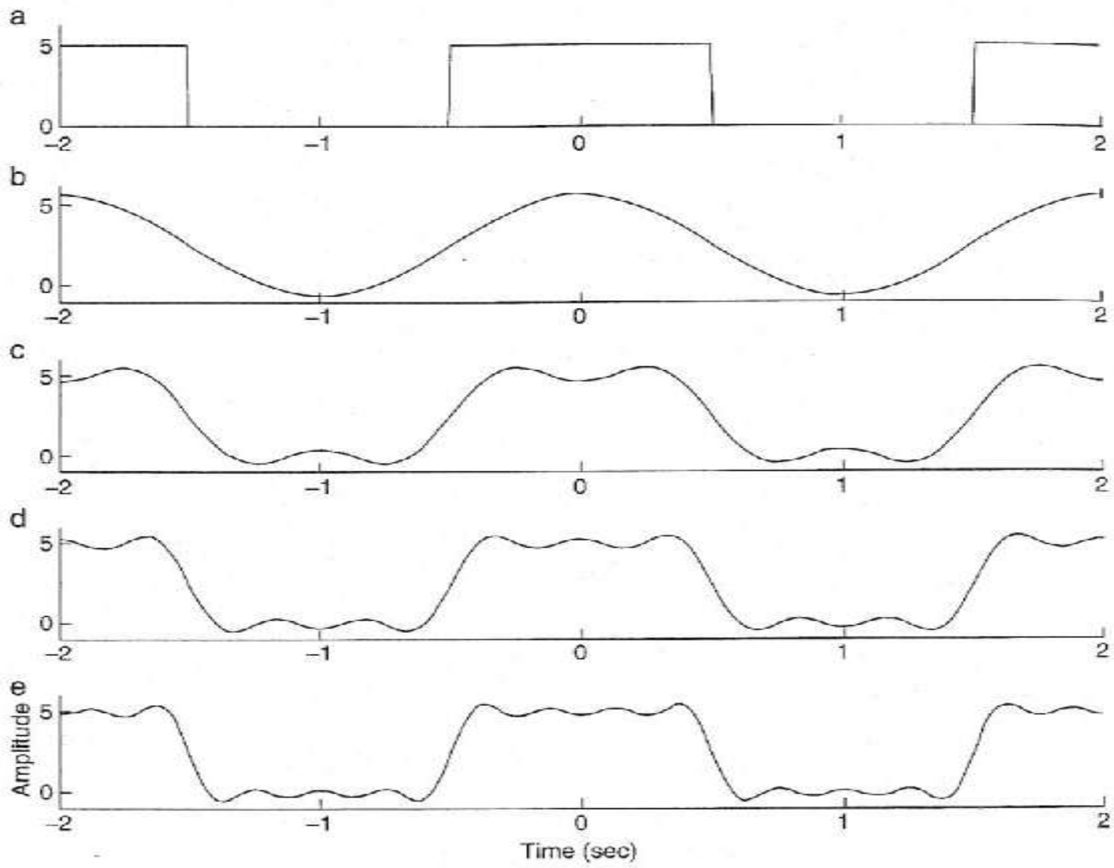
Le frequenze non sono equispaziate, e i rapporti di frequenza con la più bassa non sono interi, anzi sono addirittura irrazionali. L'onda risultante non è periodica.



ANALISI IN FREQUENZA

La **trasformata di Fourier** consente di approssimare funzioni complesse con altre più semplici ⇒ numerose applicazioni in matematica, fisica, ingegneria.

Un qualsiasi segnale (periodico di periodo T) può essere rappresentato da una combinazione di sinusoidi con ampiezza e frequenza opportune.



Onda quadra (a) approssimata da un numero crescente di sinusoidi: 1,2,3,4 rispettivamente in (b),(c),(d),(e).

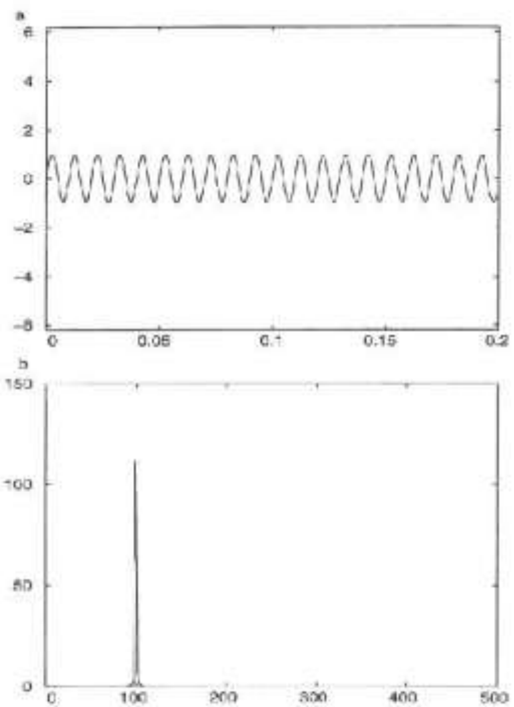
Le componenti a frequenze via via più elevate sono dette "<u>armoniche</u>"

FAST FOURIER TRANSFORM

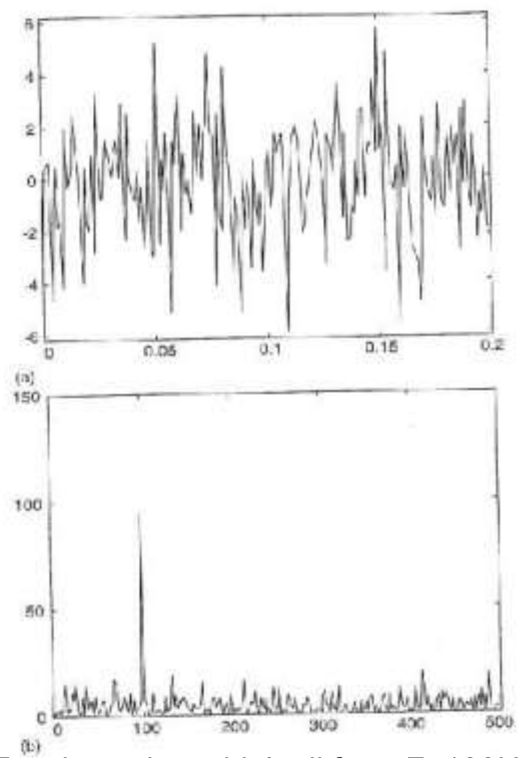
FFT - E’ un efficiente algoritmo numerico per calcolare la trasformata di Fourier discreta (DFT). Perché l’algoritmo sia particolarmente efficiente il numero di dati N deve essere una potenza del 2. Il rapporto delle velocità di esecuzione fra la DFT e l’FFT è:

$$\frac{\text{DFT computing time}}{\text{FFT computing time}} = \frac{N^2}{N\log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}$$

Ad esempio, per N=1024, l’FFT è circa 100 volte più veloce della DFT.



Funzione sinusoidale di freq. F=100Hz e relativa FFT



Funzione sinusoidale di freq. F=100Hz con rumore additivo e relativa FFT

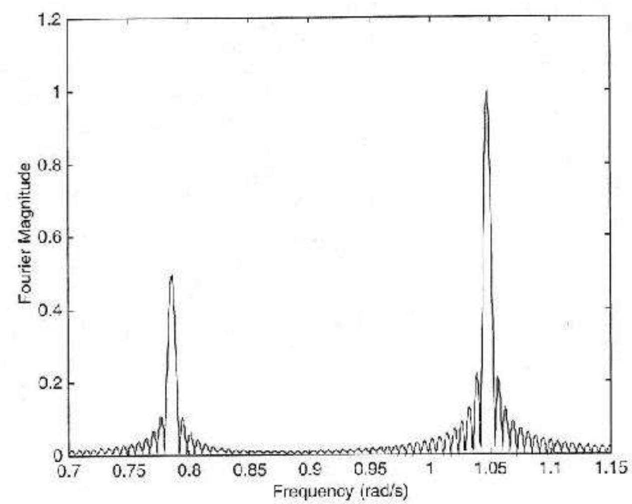


Grafico MATLAB di |FFT| (in radianti ⇔ normalizzato fra 0 e 2π) della somma di 2 sinusoidi

La Trasformata di Fourier (1)

- scompone un segnale $f(t)$ nelle sue componenti sinusoidali di diversa frequenza
- dominio dei tempi → dominio delle frequenze

PRINCIPALE LIMITE

risoluzione in frequenza, ma *non* nel tempo:

rivela *quali* frequenze sono presenti nel segnale ma non *quando* si verificano

Segnali non stazionari
Analisi nel tempo o in frequenza?

La rappresentazione più nota è lo **spettrogramma**: grafico tempo-frequenza dell'intensità del segnale.

Nello spettrogramma, l'asse orizzontale corrisponde al tempo e l'asse verticale alla frequenza.

L'intensità ad un certo istante è data da un'apposita tonalità di colore (o livello di grigio).

Le armoniche vengono rappresentate da fasce orizzontali parallele.

Es: l'inflessione della voce nel parlato produce un aumento o una diminuzione della frequenza delle armoniche.

LO SPETTROGRAMMA

La **potenza** è una misura dell'energia totale prodotta al secondo, ed è misurata in Watt.

L'**intensità** è una misura della potenza per unità di area, misurata in Watt/m^2, o in decibel (dB). La scala dei decibel è logaritmica, e consente di rappresentare grandi variazioni di potenza con piccole variazioni in dB.

Lo spettrogramma è il grafico tempo-frequenza dell'intensità del segnale

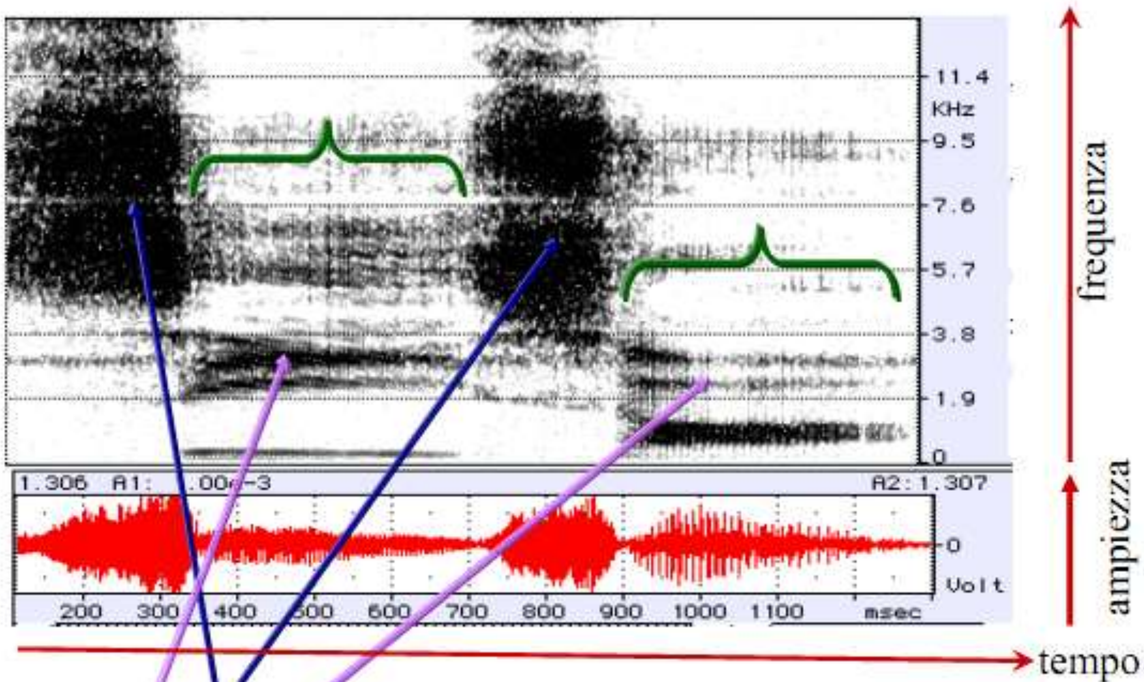
Nello spettrogramma, l'asse orizzontale corrisponde al tempo e l'asse verticale alla frequenza.

L'intensità ad un certo istante è data da un'apposita tonalità di colore (o livello di grigio) nello spettrogramma.

Le armoniche vengono rappresentate da fasce orizzontali parallele.

Es: l'inflessione della voce nel parlato produce un aumento o una diminuzione della frequenza delle armoniche.

SPETTROGRAMMA DI: /see-saw/



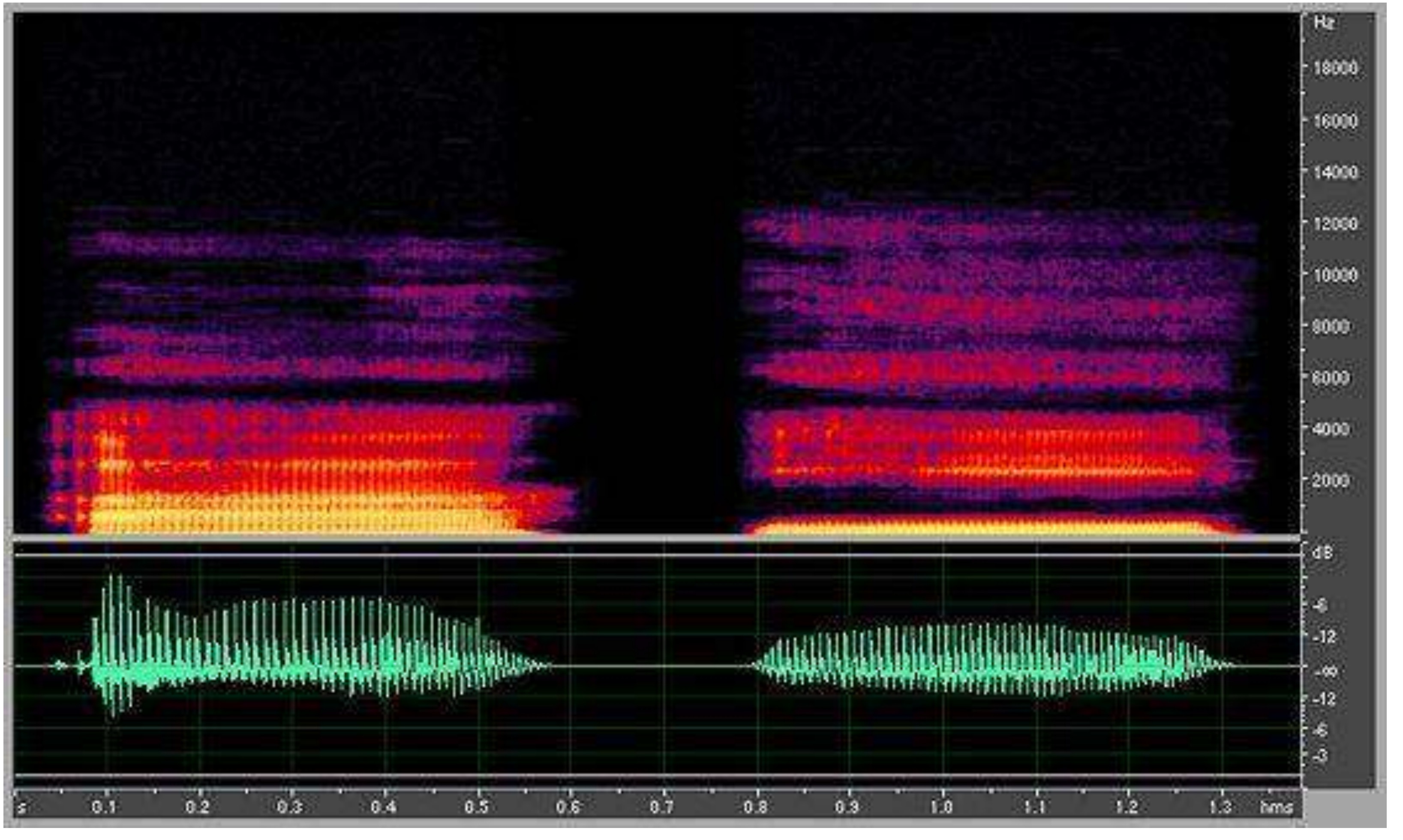
Consonante "s" ↔ alte frequenze (assenza di armoniche).

Suoni vocalici "ee" e "aw" ↔ frequenze più basse (presenza di armoniche).

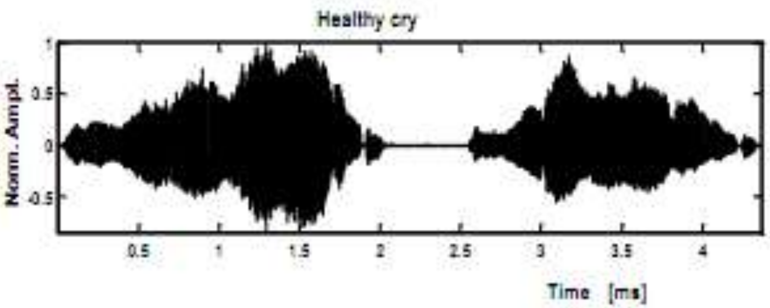
Armoniche = bande orizzontali parallele.

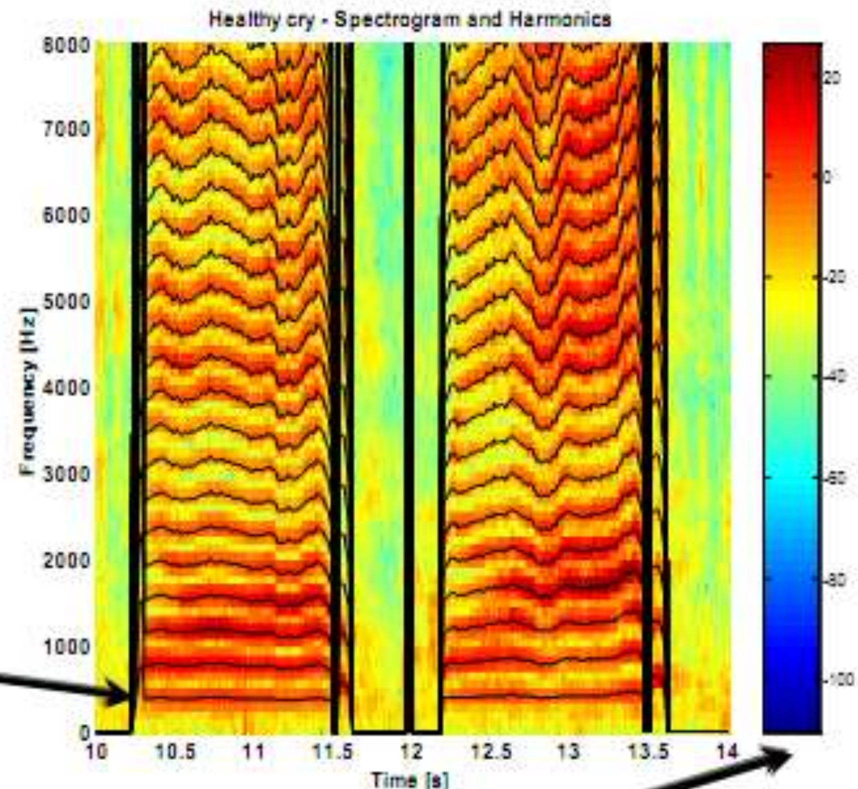
Grafico in rosso = segnale vocale corrispondente

Spettrogrammi dei suoni vocalici "a" ed "i" pronunciati da un madrelingua italiano e relative forme d'onda



SPETTROGRAMMA



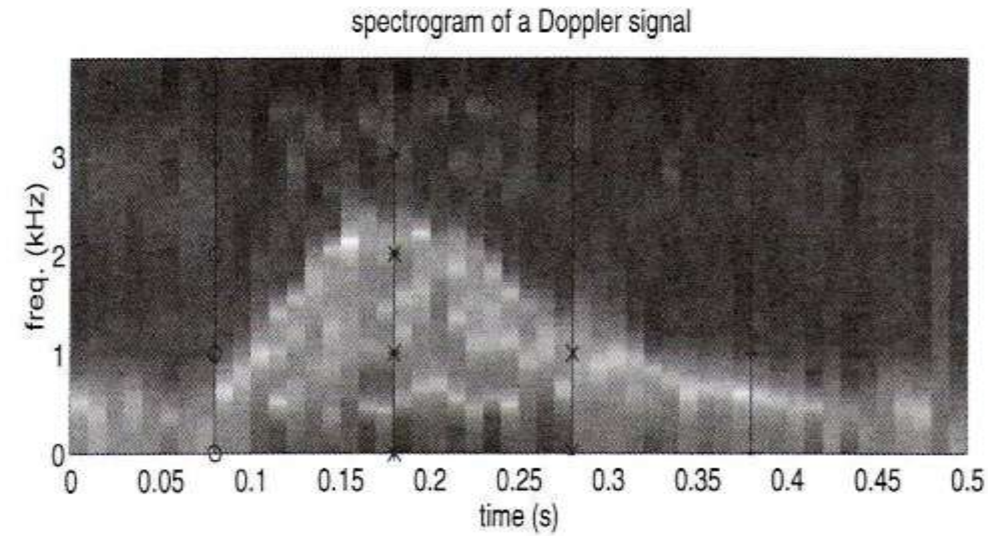


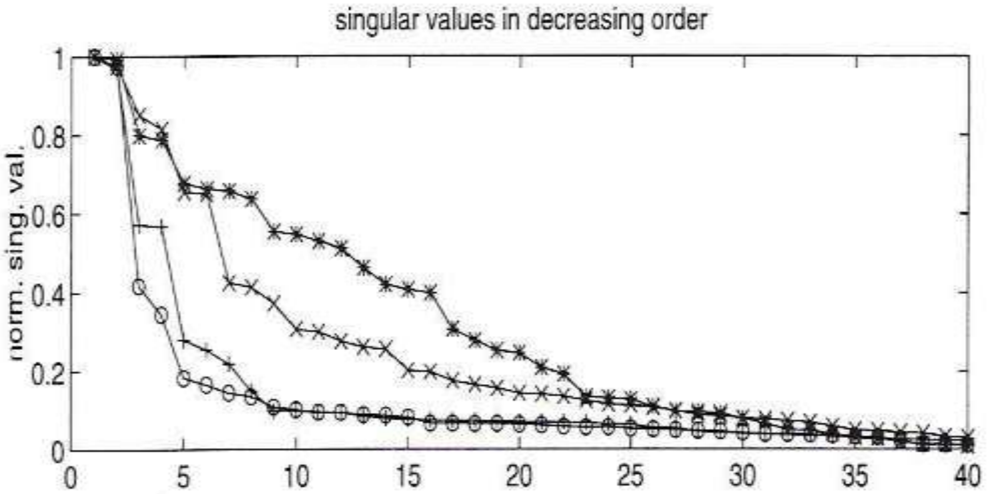
Vagito di neonato sano

$F_0 \cong 430$ Hz

Intensità: rosso = alta, blu = bassa

DOPPLER ARTERIA OMBELICALE





Stima della velocità massima sanguigna nell' arteria ombelicale materna. Si studia lo **spettrogramma del flusso sanguigno**. I massimi della PSD sono legati alla velocità massima del sangue.

Problema: segnale non stazionario richiede l'uso di tecniche adattative per stimare i parametri di interesse su intervalli di tempo ridotti (qualche decina di ms).

La Short Time Fourier Transform (1)

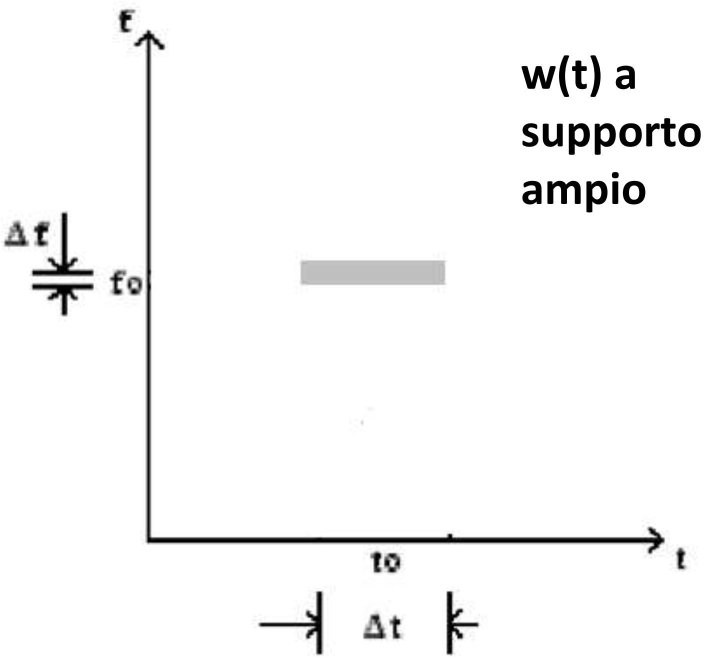
La STFT applica la trasformata di Fourier a porzioni del segnale

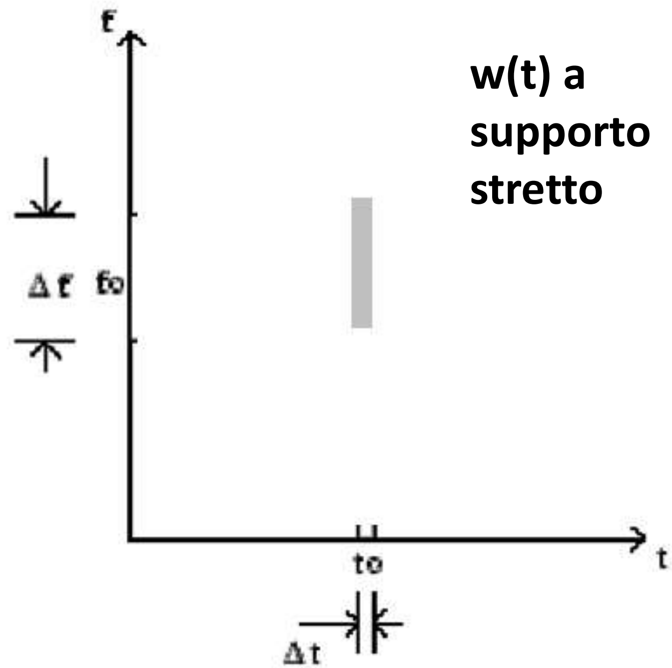
Il **segnale viene moltiplicato per una finestra w(t)** che trasla nel tempo

Fornisce una collocazione temporale di una certa banda di frequenza

La Short Time Fourier Transform (2)

Fissato il tipo di finestra, il prodotto $\Delta f * \Delta t$ è costante,





Buona risoluzione in frequenza

Bassa risoluzione nel tempo

Bassa risoluzione in frequenza

Buona risoluzione nel tempo

STFT

La STFT è lo spettro locale del segnale ad un generico istante t. Per avere una buona risoluzione nel tempo si devono utilizzare finestre di analisi di breve durata, cioè la funzione $w(t)$ deve essere concentrata nel tempo. Tuttavia per una buona risoluzione in frequenza è necessario avere un filtro con banda stretta, cioè la $W(f)$ deve essere concentrata in frequenza.

Si dimostra che vale la seguente relazione fra durata temporale Δt e larghezza di banda Δf:

$$\Delta t \, \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

Il limite inferiore è raggiunto solo da funzioni $w(t)$ di tipo gaussiano. Questa relazione viene spesso indicata con il nome di "principio di indeterminazione di Heisenberg" e mette in evidenza che la risoluzione in frequenza può esser migliorata solo a scapito della risoluzione temporale e viceversa.

Si deve osservare che nella STFT si usa una finestra costante sia al variare di t che al variare di f e quindi i valori della risoluzione Δt e Δf risultano costanti sull'intero piano tempo-frequenza.