Alcune nozioni preliminari di teoria elementare di insiemi e funzioni

Alberto Pinto

Corso Propedeutico - METS
A.A. 2013/2014

1 Insiemi

1.1 Generalità

Diamo la definizione di insieme secondo Georg Cantor, matematico tedesco della seconda metà dell'Ottocento:

1.1 Definizione. Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme.

1.1 Osservazione. Notiamo che la definizione è un po' tautologica in quanto il termine "collezione" è, bene o male, sinonimo di "insieme" nella lingua corrente. In ogni caso non approfondiamo oltre questo punto e assumiamo il concetto di *insieme* come intuitivo così come quello di *elemento* di un insieme.

Un insieme si può descrivere in diversi modi. Suponiamo che l'insieme che vogliamo descrivere, e che chiameremo A, sia costituito dai numeri naturali (cioè numeri interi e positivi) da 1 a 5 o, inaltre parole, i cui *elementi* sono i numeri naturali da 1 a 5. Possiamo procedere nei seguenti tre modi:

1. **estensivamente**, ossia enumerando *tutti* i suoi elementi e scrivendo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \tag{1.1}$$

2. **attraverso una proprietà** che lo descriva completamente, ossia scrivendo
$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 5\} \tag{1.2}$$
che si legge: A è formato dai numeri x appartenenti ad $\mathbb{N}$ (ossia i numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... ecc.) tali che sono maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 5 (ossia compresi tra 1 e 5, estremi inclusi)

3. **attraverso un diagramma di Eulero-Venn**, ossia attraverso un disegno di questo tipo:

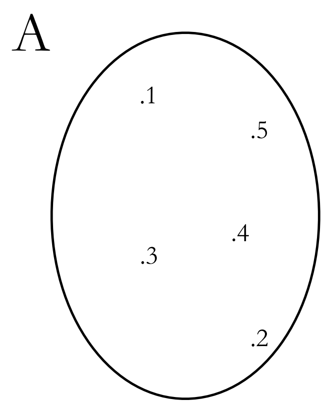

Figura 1: Un tipico diagramma di Venn che rappresenta l'insieme A

1.2 Definizione. Per *cardinalità* di un insieme intendiamo semplicemente il numero dei suoi elementi. Dato un insieme A la sua cardinalità si indica con $|A|$ o con $\#(A)$ o anche $card(A)$.

1.2 Sottoinsiemi

Dato un insieme è possibile considerarne alcune parti più piccole o *sottoinsiemi*, cioè insiemi costituiti da alcuni (eventualmente tutti o anche nesuno) dei suoi elementi. Più in generale diamo la seguente

1.3 Definizione. Un insieme B è un *sottoinsieme* di un insieme A (o una *parte* di A) se e solo se tutti gli elementi di B sono pure elementi di A

Esempio 1.1. Nel caso precedente, dove $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, un suo sottoinsieme potrebbe essere ad esempio l'insieme $B = \{1, 4, 5\}$. Con un diagramma di Venn potremmo rappresentare B nel seguente modo:

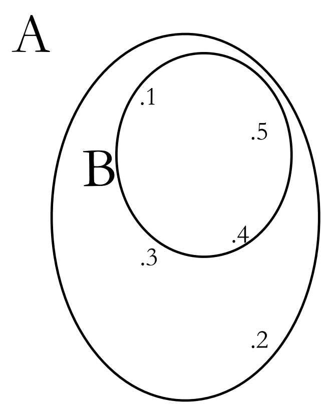

Figura 2: Un tipico diagramma di Venn che rappresenta l'insieme B come sottoinsieme dell'insieme A

1.2 Osservazione. Facciamo notare che sia l'insieme A stesso che il cosiddetto **insieme vuoto**, indicato con $\emptyset$, sono entrambi sottoinsiemi di A.
Altri particolari sottoinsiemi sono quelli formati da un solo elemento, ossia (a dire il vero con un leggero abuso di linguaggio, ma non fateci troppo caso. . .) gli stessi elementi di A.

1.3 Insieme potenza

Dato un insieme A, una cosa che si può fare è considerarne tutti i suoi sottoinsiemi, compresi l'insieme A stesso e l'insieme vuoto $\emptyset$ (che vengono anche detti sottoinsiemi *banali* o *degeneri*). Poichè questo concetto è abbastanza importante, gli si dà anche un nome e lo si chiama *insieme potenza.* Pertanto:

1.4 Definizione. Dato un insieme A si chiama **insieme potenza** o **insieme delle parti di** A, indicato con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A.

1.3 Osservazione. A volte l'insieme potenza di un insieme A viene indicato anche con il simbolo 2^A. Dimostreremo in seguito (vedi paragrafo 3.1) che il motivo di questo è proprio il fatto che la cardinalità dell'insieme potenza è 2 elevato alla cardinalità dell'insieme A .

Esempio 1.2. Sia $A = \{a, b, c\}$. Proviamo ad elencare tutti i suoi sottoinsiemi partendo da quello di cardinalità massima (l'insieme A stesso) fino a quello di cardinalità minima (l'insieme vuoto, che ha cardinalità zero):

- $A = \{a, b, c\}$
- $\{a, b\}$
- $\{a, c\}$
- $\{b, c\}$
- $\{a\}$
- $\{b\}$
- $\{c\}$
- $\emptyset$

Allora l'insieme potenza sarà $\mathcal{P}(A) = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$, cioè l'insieme i cui elementi sono proprio tutti i possibili sottoinsiemi di A. Osserviamo che la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è 8, che coincide proprio con 2 elevato alla cardinalità di A, che è 3 (quindi $8 = 2^3$).

1.4 Operazioni tra insiemi

1.5 Definizione. Un' *operazione* tra insiemi è una regola che a partire da uno, due o più insiemi mi permette di ricavare un nuovo insieme

1.4.1 Differenza

Dati due insiemi A e B la *differenza* tra A e B è definita come quell'insieme che contiene gli elementi di A che *non* appartengono anche a B. In simboli:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\} \tag{1.3}$$

che si legge: A meno B è l'insieme degli elementi x tali che x appartiene ad A e non a B.

1.4.2 Complementare

1.6 Definizione. Dato un insieme A, contenuto in un insieme più grande che chiamiamo *insieme universo* U, definiamo il *complemento* di A rispetto ad U l'insieme $U \setminus A$.

1.4.3 Unione

1.7 Definizione. Dati due insiemi A e B l'*unione* tra A e B è definita come quell'insieme che contiene sia gli elementi di A che quelli di B. In simboli:

$$A \sqcup B = \{x|x \in A \text{ oppure } x \in B\} \tag{1.4}$$

1.4.4 Intersezione

1.8 Definizione. Dati due insiemi A e B l'*intersezione* tra A e B è definita come quell'insieme che contiene gli elementi comuni ad A a B. In simboli:

$$A \sqcap B = \{x|x \in A \text{ e } x \in B\} \tag{1.5}$$

1.4.5 Prodotto di insiemi

1.9 Definizione. Dati due insiemi A e B il *prodotto* tra A e B è definito come quell'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate del tipo (x, y) dove il primo elemento, x, appartiebne al primo insieme, A, e il secondo elemento, y, appartiene al secondo insieme B. In simboli:

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A \text{ e } y \in B\} \tag{1.6}$$

2 Relazioni e Funzioni

2.1 Relazioni

Una *relazione* $\mathcal{R}(A, B)$ tra due insiemi A ed B non è altro che un sottoinsieme del loro prodotto $X \times Y$.

Esempio 2.1. Sia $A = \{1, 2, 3\}$ ed $B = \{a, b\}$. L'insieme prodotto sarà formato dalle coppie ordinate il cui primo elemento sta in A ed il secondo elemento sta in B, cioè $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$. Una possibile relazione $\mathcal{R}(A, B)$ potrebbe essere questa:

$$\mathcal{R}(A, B) = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\} \tag{2.1}$$

Ciò significa che:

- l'elemento 1 di A è in relazione con l'elemento a di B
- l'elemento 2 di A è in relazione sia con l'elemento a che con l'elemento b di B
- l'elemento 3 di A è in relazione con l'elemento b di B

2.2 Funzioni

Le funzioni non sono altro che un caso particolare di relazioni nel quale ciascun elemento del primo insieme è in relazione con uno ed un solo elemento del secondo insieme.

2.1 Osservazione. La relazione dell'esempio 2.1 **non** è una funzione perchè l'elemento 2 di A è in relazione sia con l'elemento a che con l'elemento b di B.

2.2 Osservazione. In realtà si potrebbe anche definire in maniera più generale una funzione come quel particolare tipo di relazione nella quale ogni elemento del primo insieme è in relazione con *al più* un elemento del secondo (quindi o uno o nessuno). Nel caso in cui esistano effettivamente degli elementi del primo insieme che non sono in relazione con alcun elemento del secondo, la funzione viene detta *funzione parziale*. Tuttavia questo tipo di funzioni esulano dalla nostra trattazione e pertanto non ce ne occuperemo.

2.2.1 Funzioni iniettive

Una funzione si dice *iniettiva* se manda elementi diversi in elementi diversi. Più formalmente diamo la seguente definizione.

2.1 Definizione. Una funzione f da un insieme A ad un insieme B si dice *iniettiva* se per ogni $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$ vale il seguente fatto:

$$\textit{se } x_1 \neq x_2 \textit{ allora } f(x_1) \neq f(x_2)$$

2.2.2 Funzioni suriettive

2.2 Definizione. Una funzione f da un insieme A ad un insieme B si dice *suriettiva* se per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che $f(x) = y$

In altre parole una funzione è suriettiva se ogni elemento del codominio (l'insieme B) ha una controimmagine nel dominio (l'insieme A).

2.2.3 Funzioni biiettive

2.3 Definizione. Una funzione f da un insieme A ad un insieme B si dice *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

3 Calcolo combinatorico

Richiamiamo ora alcuni fatti di calcolo combinatorico utili in statistica.

3.1 Insieme potenza

L'insieme $\mathcal{P}(A)$di tutti i sottoinsiemi di un insieme dato A si chiama insieme potenza di A, come definito nel paragrafo 1.3. Vogliamo adesso contare quanti sono questi sottoinsiemi.

Cominciamo col dire che questi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con le funzioni dall'insieme A all'insieme $B = \{0, 1\}$ formato da due soli elementi (che per esempio chiamiamo 0 e 1), cioè sono tanti quante le funzioni da A a B. Perchè succede questo? Se ci pensiamo un attimo, una funzione da A a B rappresenta esattamente la scelta di un po' di elementi di A nel senso che quelli che la funzione manda in 1 sono gli elementi scelti e quelli che manda in 0 sono quelli NON scelti. Quindi dare un sottoinsieme di A è esattamente la stessa cosa che dare una funzione da A a $B = \{0, 1\}$.

Se noi riusciamo a contare le funzioni da un generico insieme A, di cardinalità p, ad un generico insieme B, di cardinalità q, abbiamo risolto anche il nostro problema di contare i sottoinsiemi di A perchè basterà ovviamente particolarizzare q al valore 2. Pertanto vediamo come calcolare questo valore nel seguente paragrafo.

3.1.1 Numero di funzioni da A a B

Allora, quante sono le funzioni da un generico insieme A, di cardinalità p, ad un generico insieme B, di cardinalità q? Ogni elemento di A può essere mandato in un qualsiasi elemento di B, quindi in q possibili elementi. Poichè questo vale per ogni elemento di A (nel senso che ogni elemento di A può essere mandato in uno qualsiasi dei q elementi di B) e poichè queste scelte sono del tutto indipendenti tra di loro il risultato sarà:

$$\underbrace{q \times \cdots \times q}_{p-\text{volte}} = q^p \tag{3.1}$$

Quindi il numero di funzioni da un generico insieme A, di cardinalità p, ad un generico insieme B, di cardinalità q è esattamente q^p.

Questo ci permette di rispondere anche alla nostra domanda iniziale, cioè la cardinalità dell'insieme potenza. Abbiamo detto che questa è pari al numero di funzioni dal nostro insieme A, che supponiamo di cardinalità p, all'insieme $B = \{0, 1\}$ formato da due soli elementi. Per quanto detto risulta:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^p \tag{3.2}$$

cioè la cardinalit'a di $\mathcal{P}(A)$ è data da 2 elevato alla cardinalità di A.

3.2 Numero di funzioni iniettive da A a B

Ci proponiamo ora di contare il numero di funzioni iniettive da un generico insieme A, di cardinalità k, ad un generico insieme B, di cardinalità n. Procediamo nel seguente modo. Siccome vogliamo contare le funzioni iniettive da A a B, dovremmo dire come fare a costruire delle funzioni da A a B in modo tale che elementi diversi di A vadano a finire in elementi diversi di B.

Allora, se consideriamo un elemento $x_1 \in A$ questo potrà essere mandato in n possibili elementi di B; in questo modo ho fissato l'immagine di x_1. Se adesso voglio dire dove va a finire, sempre tramite la mia funzione, un altro elemento $x_2 \in A$ avrò a disposizione solo $n-1$ possibilità, perchè un elemento di B è già stato usato come immagine di un elemeto di A (e precisamente di x_1) e io non voglio che elementi diversi di A vadano a finire nello stesso elemento di B, perchè sto definendo una funzione iniettiva. Analogamente per quento riguarda un terzo elemento $x_3 \in A$ avrò a disposizione solo $n - 2$ elementi di B, e così via. In definitiva il numero totale sarà:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \tag{3.3}$$

cioè parto da n e lo moltiplico per tutti i suoi antecedenti (cioè $(n-1)$, $(n-2)$, ecc.) fino a $(n-k+1)$. Quindi se per esempio $n = 4$ e $k = 2$, cioè sto contando le funzioni da un insieme di 2 elementi in un insieme di 4 elementi, il mio prodotto sarà:

$$4 \cdot 3 \tag{3.4}$$

questo perchè $(n-k+1) = 3$.

3.3 Numero di sottoinsiemi di una certa cardinalità k di un insieme A di cardinalità n: il coefficiente binomiale

A questo punto siamo anche in grado di contare i sottoinsiemi di una certa cardinalità k di un insieme A di cardinalità n.

Esempio 3.1. Sia $A = \{a, b, c\}$. Proviamo ad elencare tutti i suoi sottoinsiemi di cardinalità 2:

- $\{a, b\}$
- $\{a, c\}$
- $\{b, c\}$

Abbiamo quindi 3 sottoinsiemi di cardinalità 2.

Più in generale, per un insieme A generico, osserviamo che contare i sottoinsiemi di cardinalità k (ovviamente $k \leq n$) equivale a contare il numero di funzioni iniettive da un insieme B di cardinalità k al nostro insieme A di cardinalità n **ma a meno dell'ordine**, come spiegato nel seguente esempio.

Esempio 3.2. Come nell'esempio precedente, sia $A = \{a, b, c\}$. Proviamo ad elencare tutti i suoi sottoinsiemi di cardinalità 2:

- $\{a, b\}$
- $\{a, c\}$
- $\{b, c\}$

Proviamo ora ad elencare tutte le funzioni da un insieme B di cardinalità 2, che ad esempio indicheremo con $B = \{0, 1\}$, nell'insieme A:

- $f_1(0) = a$; $f_1(1) = b$
- $f_2(0) = b$; $f_2(1) = a$
- $f_3(0) = a$; $f_3(1) = c$
- $f_4(0) = c$; $f_4(1) = a$
- $f_5(0) = b$; $f_5(1) = c$
- $f_6(0) = c$; $f_6(1) = b$

Come si vede nell'esempio qui sopra, per ogni sottoinsieme di A ci sono esattamente 2 funzioni che lo hanno come codominio (la f_1 e la f_2, la f_3 e la f_4, la f_5 e la f_6). Questo accade perchè, tanto per fare un esempio, sia la f_1 che la f_2 hanno lo stesso codominio e la sola differenza sta nel fatto che i due elementi del loro dominio (lo 0 e l'1) vengono mandati una volta l'uno in a e l'altro in b e poi l'uno in b e l'altro in a. In altre parole differiscono solo per uno scambio che, detto in altri termini, altro non è che l'unica permutazione possibile sui due elementi 0 e 1.

Per farla breve, dovremo dividere per tutte le permutazioni possibili tra gli elementi del dominio. E quante sono queste permutazioni? Sono esattamente tante quante le funzioni iniettive da un insieme di k elementi in se stesso, cioè k! Basta provare a fare il conto del paragrafo 3.2 ponendo $n = k$. Si ha:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \underbrace{(n-n+1)}_{=1} \tag{3.5}$$

cioè esattamente quello che si chiama **il fattoriale di** k, o k **fattoriale**, ossia il prodotto del numero k con tutti i suoi antecedenti fino a 1. Ad esempio se $k = 5$ si ha che $k! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Bene, siamo in grado adesso di dire **quanti sono i sottoinsiemi di una certa cardinalità** k **di un insieme** A **di cardinalità** n: essi sono esattamente:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{3.6}$$

Questo numero è talmente importante che gli si dà un nome, e precisamente quello di **coefficiente binomiale** e lo si indica col simbolo $\binom{n}{k}$. Quindi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{3.7}$$

o, equivalentemente

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.8}$$

È facile verificare che le due scritture coincidono (chi ha tempo/voglia lo verifichi per esercizio!)