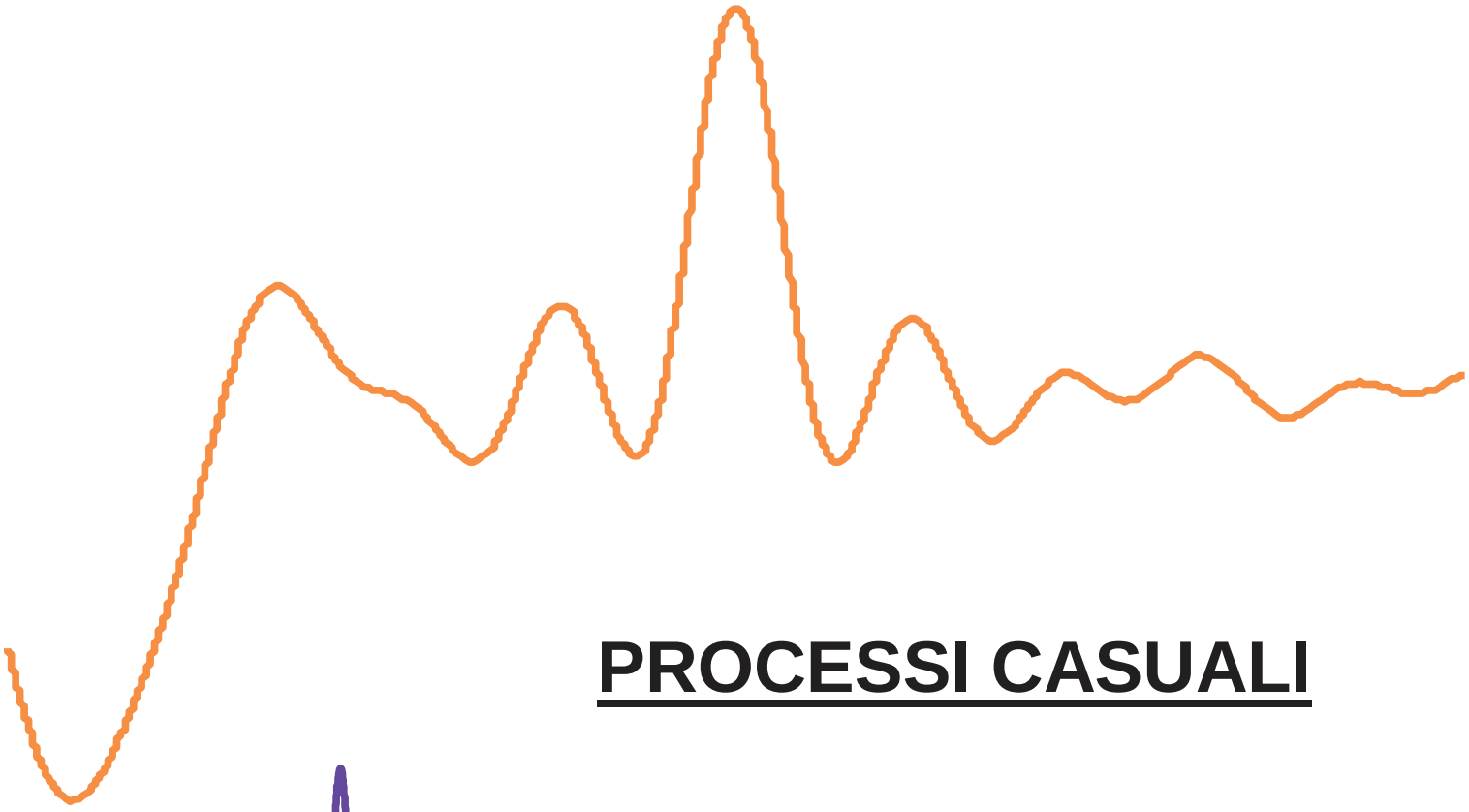
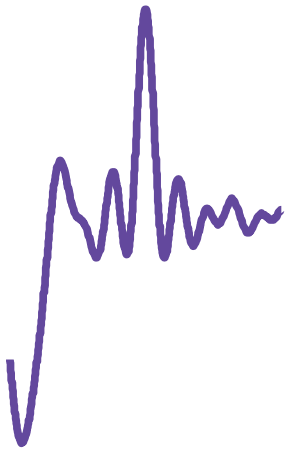
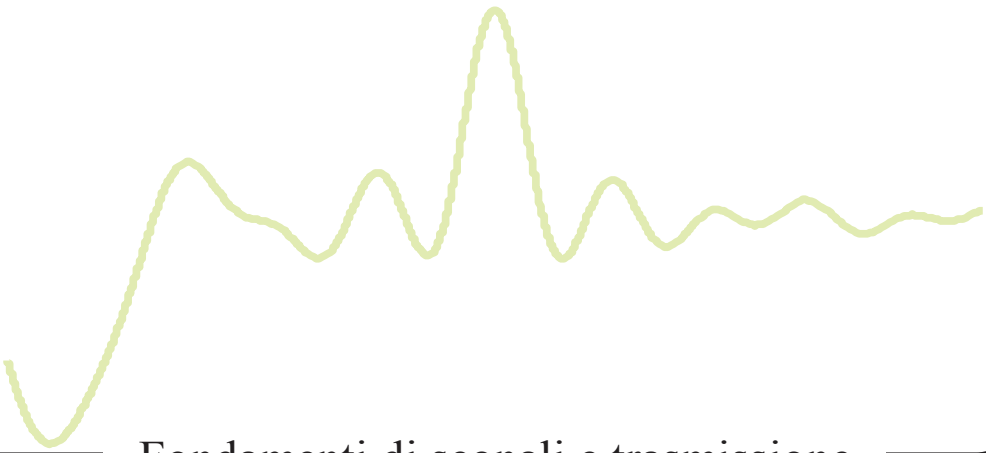


# PROCESSI CASUALI





# Segnali deterministici

Un segnale $x(t)$ si dice deterministico se è una funzione nota di $t$, cioè se ad un qualsiasi istante di tempo $t_o$ è associato un ben preciso valore $x(t_o)$ .

Ad esempio i valori assunti dal segnale $x(t)=\cos(2\pi t)$ sono noti con certezza per ogni valore di $t$ :

| $t$ | … | -0.4 | -0.3 | -0.2 | -0.1 | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | … | -0.809 | -0.309 | 0.309 | 0.809 | 1 | 0.809 | 0.309 | -0.309 | -0.809 | ... |

Non ha alcuna importanza il fatto che il segnale sia rappresentabile con una semplice funzione matematica come il coseno, ma solo che sia noto in modo univoco. In un certo senso qualunque segnale, anche il meno prevedibile (come il segnale radio captato da un'antenna, il rumore presente in un dispositivo elettronico, …), può essere considerato deterministico, una volta che sia stato osservato!

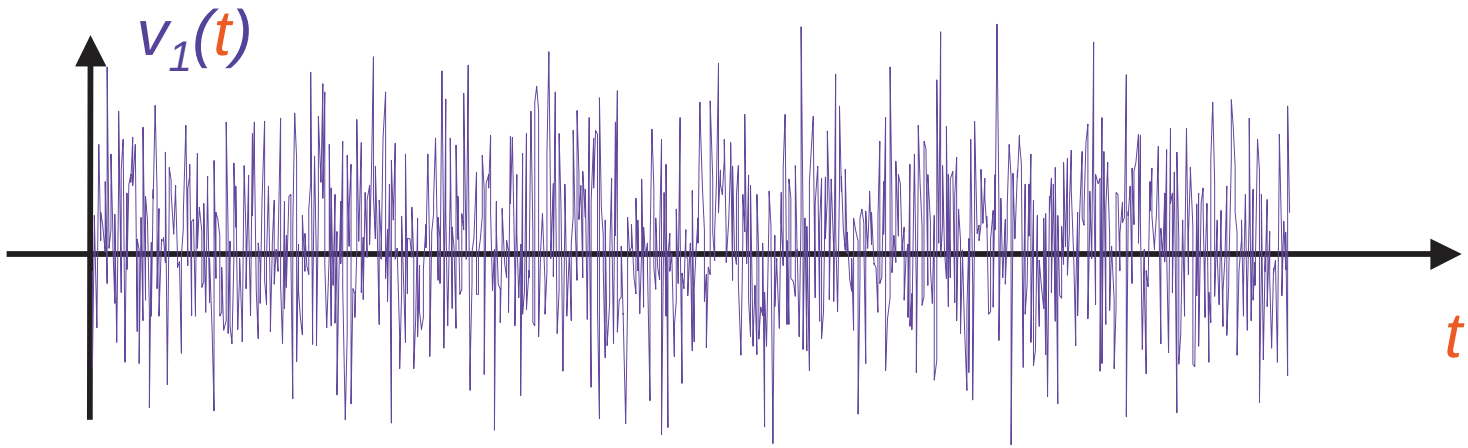
Questo punto di vista non è però particolarmente utile per la maggior parte dei segnali che trasportano informazione, e quindi non prevedibili *a priori*.

# Introduzione ai processi casuali (1)

## Il rumore termico

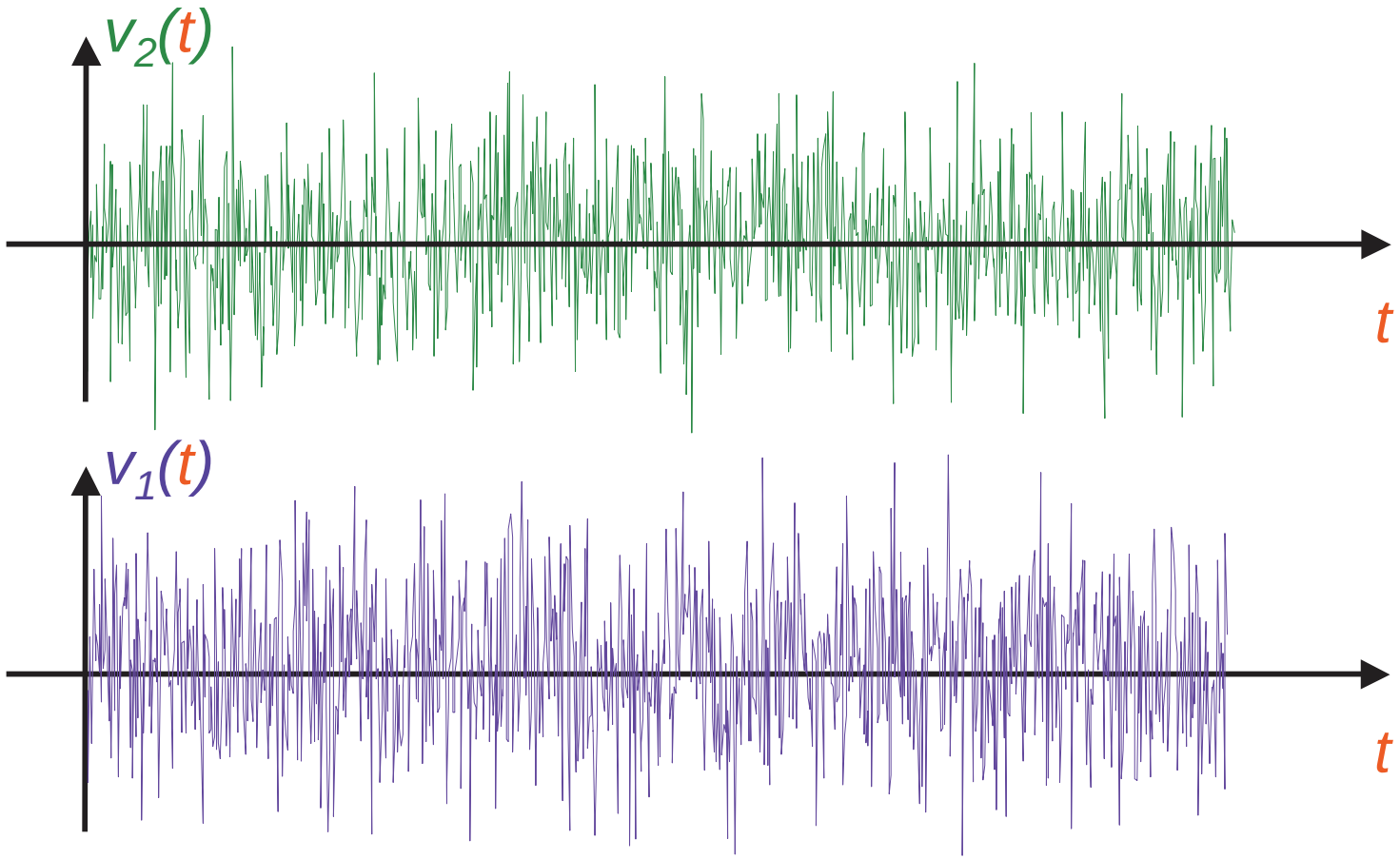
Un classico e importante esempio utile a introdurre il concetto di processo casuale è rappresentato dalla debole tensione elettrica $v_1(t)$ esistente ai capi di un resistore. Questa tensione, variabile nel tempo, è causata dal movimento caotico degli elettroni (questo effetto, indesiderato, cresce con la temperatura del materiale).

Se si registra la tensione $v_1(t)$ si ottiene (dopo aver effettuato la misura!) un segnale che può essere considerato deterministico.



# Introduzione ai processi casuali (2)

Se però si prende un secondo resistore identico al primo, posto alla stessa temperatura, e si esegue la misura della tensione elettrica ai suoi capi, si ottiene un nuovo segnale $v_2(t)$, con **caratteristiche simili** ma **diverso** dal precedente poiché gli elettroni si muovono in modo diverso, ed indipendentemente, nei due resistori.



# Introduzione ai processi casuali (3)

Se lo scopo è determinare l'effetto del rumore termico prodotto dal resistore su un'apparecchiatura elettronica o un sistema di trasmissione, non è di alcuna utilità aver visto l'andamento delle tensioni $v_1(t)$ o $v_2(t)$ ai capi dei due resistori se il resistore effettivamente montato nell'apparecchiatura è un altro (o anche il primo, ma in un tempo successivo: il rumore termico non si ripete in modo prevedibile!).

E' utile invece individuare e descrivere le caratteristiche della tensione di rumore comuni a tutti i resistori dello stesso tipo e a quella stessa temperatura.

In questo modo, qualsiasi sia il resistore (di quel valore e a quella temperatura) montato nell'apparecchiatura, si potrà calcolare, per esempio, con quale probabilità si presenteranno certi valori di tensione o quale sarà la potenza del rumore.

Si abbandona dunque il concetto di certezza (proprio dei segnali deterministici) per passare a quello dell'incertezza, descritto dalla teoria delle probabilità e proprio dei **processi casuali**.

I valori del processo in generici istanti di tempo sono considerati variabili casuali, e descritti come tali (attraverso le relative densità di probabilità).

# Descrizione dei processi casuali

Di un processo casuale è utile conoscere le caratteristiche comuni a tutte le realizzazioni.

Un processo casuale è descritto completamente dalle densità di probabilità congiunte di tutti gli ordini e per tutti gli istanti di tempo. Tuttavia in molti casi questa informazione completa non è disponibile. In pratica si utilizzano soprattutto:

**la densità di probabilità delle ampiezze del processo $p_x(a)$**

che descrive con quale probabilità una realizzazione del processo casuale $x(t)$ assume valori in un intorno di $a$. In generale $p_x(a)$ dipende anche dal tempo. Tuttavia noi ci occuperemo di una classe di processi casuali detti stazionari le cui caratteristiche statistiche non dipendono dal tempo $t$.

**la funzione di autocorrelazione del processo $R_x(\tau)$**

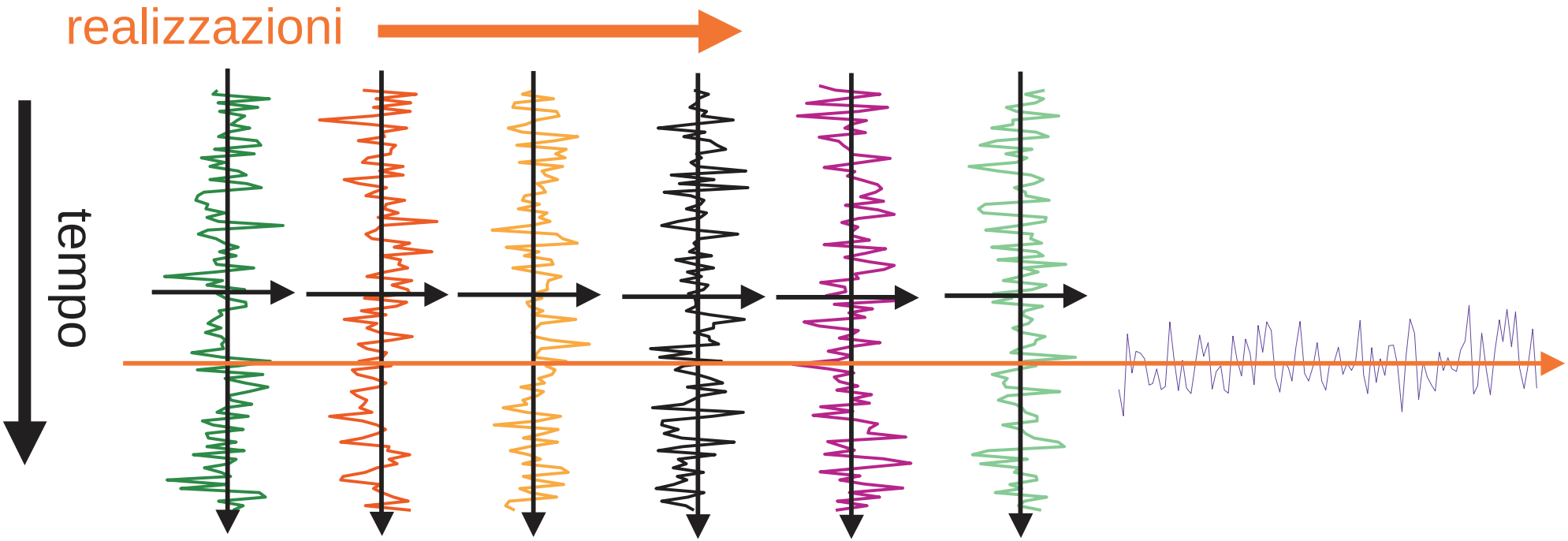
che descrive quantitativamente il legame tra il valore assunto da una realizzazione del processo casuale al tempo $t+\tau$ e quello assunto dalla stessa realizzazione al tempo $t$.

Limitando l'analisi ai processi casuali stazionari, $R_x(\tau)$ non dipende dal tempo $t$ ma solo dall'intervallo di tempo $\tau$.

# Processi casuali ergodici

Tra i processi casuali **stazionari** esistono processi per i quali si possono ricavare la densità di probabilità e la funzione di autocorrelazione da una sola realizzazione.

**Questi processi sono detti ergodici.**




Osservare tutte le realizzazioni ad un istante di tempo (o ad una coppia di istanti) permette di ricavare le stesse informazioni statistiche ottenibili dall'osservazione prolungata nel tempo di una singola realizzazione.
Un esempio di processo ergodico è rappresentato dal rumore termico.

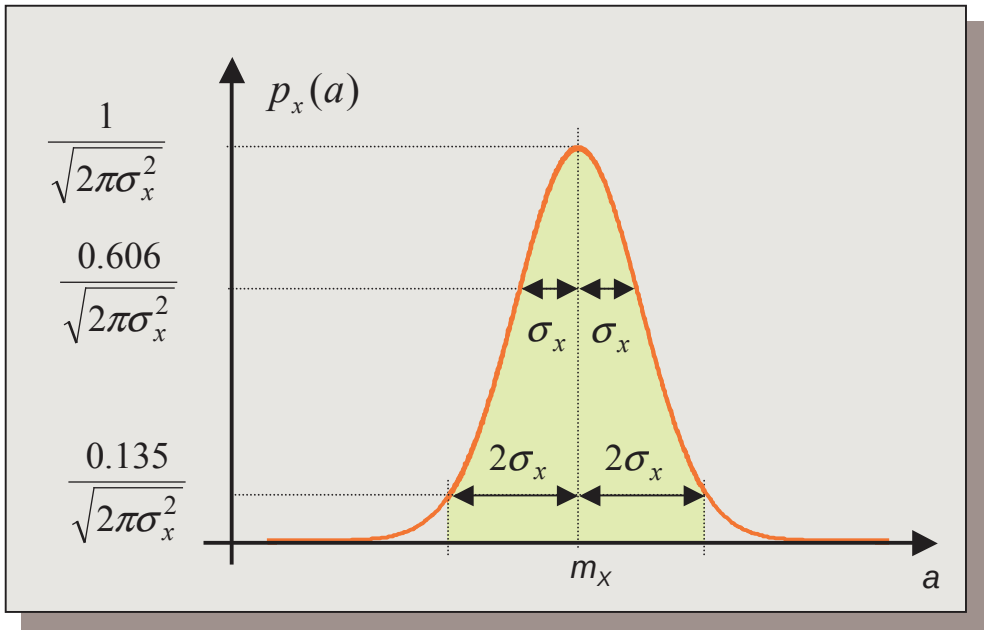
# Densità di probabilità del processo casuale

**La densità di probabilità (d.d.p.) di un processo stazionario** non ha nulla di diverso rispetto alla densità di probabilità di una variabile casuale, definita in precedenza. Infatti, ad un tempo assegnato $t = t_o$, il processo casuale è una variabile casuale $x = x(t_o)$ (solitamente si sottintende l'istante di tempo $t_o$ e si indica la variabile casuale con $x$) e come tale può essere trattato. A partire dalla d.d.p si possono calcolare due parametri del processo casuale di grande utilità pratica:

il valor medio $m_x$
e la varianza $\sigma^2_x$

esempio: d.d.p. gaussiana

$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

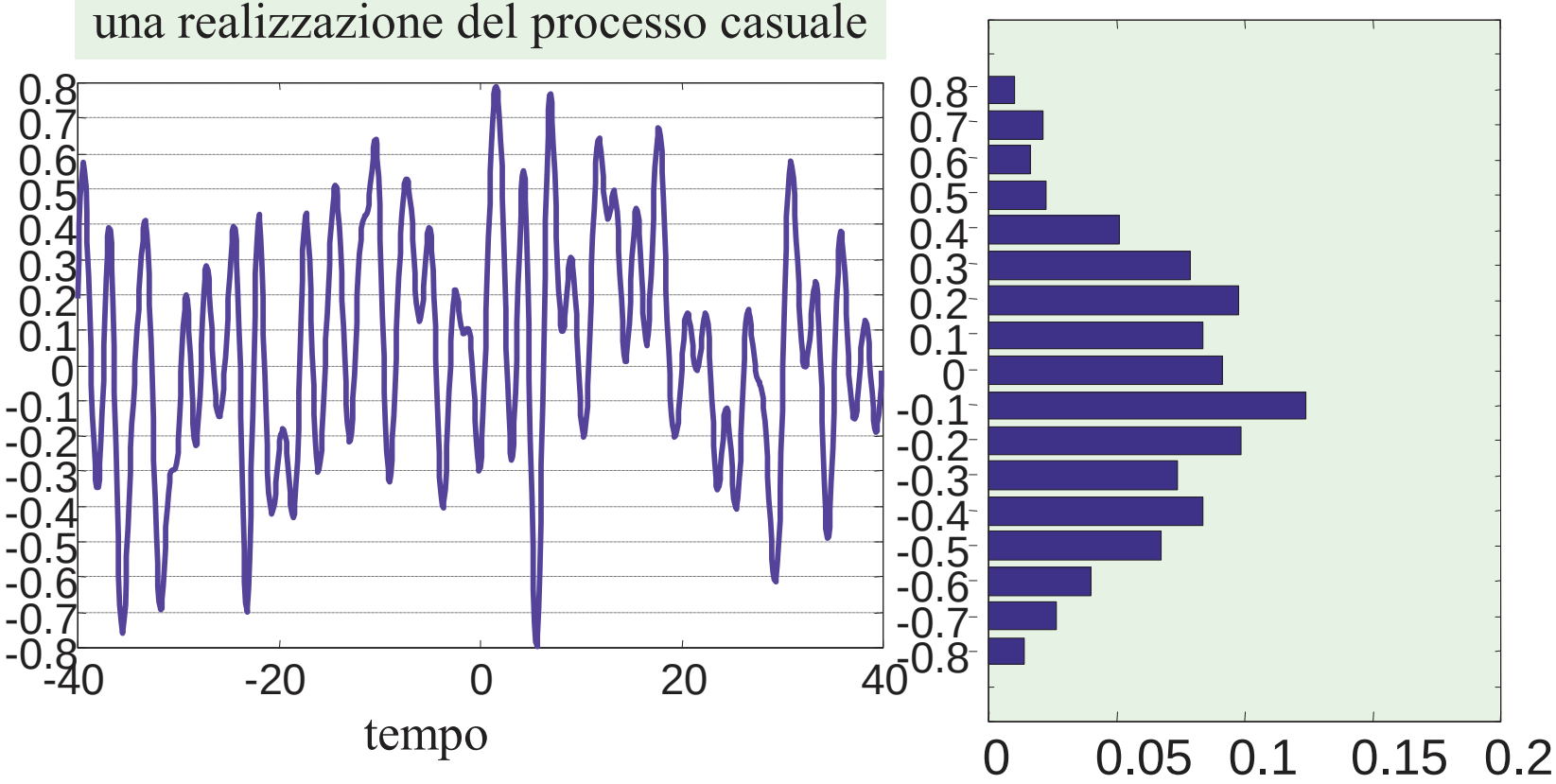



Analogamente le densità di probabilità congiunte di un processo stazionario non sono altro che le densità congiunte in due (o più) istanti di tempo.

# Densità di probabilità di un processo casuale ergodico

La densità di probabilità di un processo casuale ergodico può essere valutata, oltre che dall'insieme delle realizzazioni (ad un solo istante di tempo, arbitrario) anche da una sola realizzazione, come percentuale del tempo in cui il processo assume ampiezze fra ***a*** e ***a+da*** divisa per l'ampiezza dell'intervallo ***da***.

una realizzazione del processo casuale

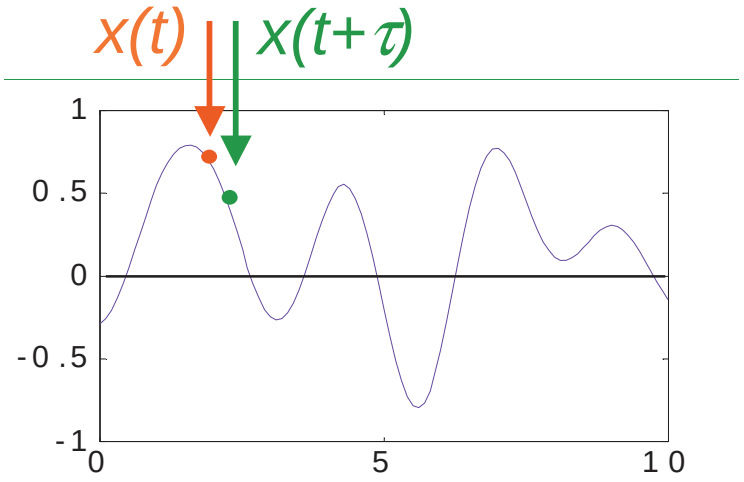


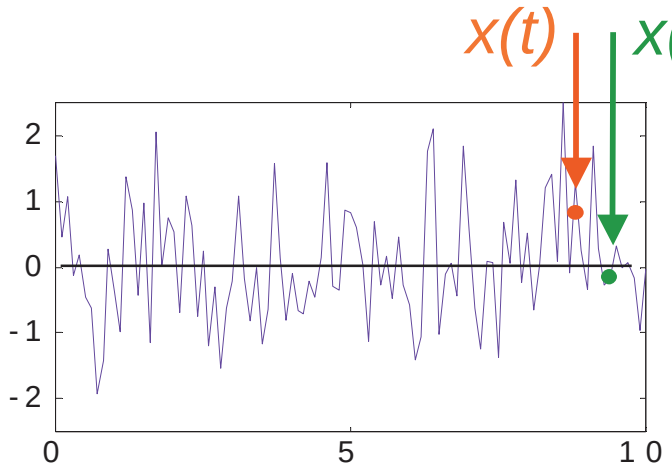
# Autocorrelazione di un processo casuale stazionario (1)

L'autocorrelazione del processo $x(t)$ è definita come valor medio di $x(t)x(t+\tau)$, ed è calcolabile dalla ddp congiunta. Se il processo è stazionario l'autocorrelazione non dipende da $t$, ma solo da $\tau$. L'autocorrelazione è interpretabile come media aritmetica, su un gran numero di realizzazioni, dei prodotti dei valori del processo agli istanti $t$ e $t+\tau$.

$$R_x(\tau) = E\left[x(t)\,x(t+\tau)\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\,x_i(t+\tau)$$

Il primo dei due processi casuali in figura ha realizzazioni che variano lentamente nel tempo (ad es. il rumore di un motore di un'auto al minimo); il secondo ha realizzazioni che variano con grande rapidità (ad es. il fruscio di fondo di un vecchio disco rovinato).



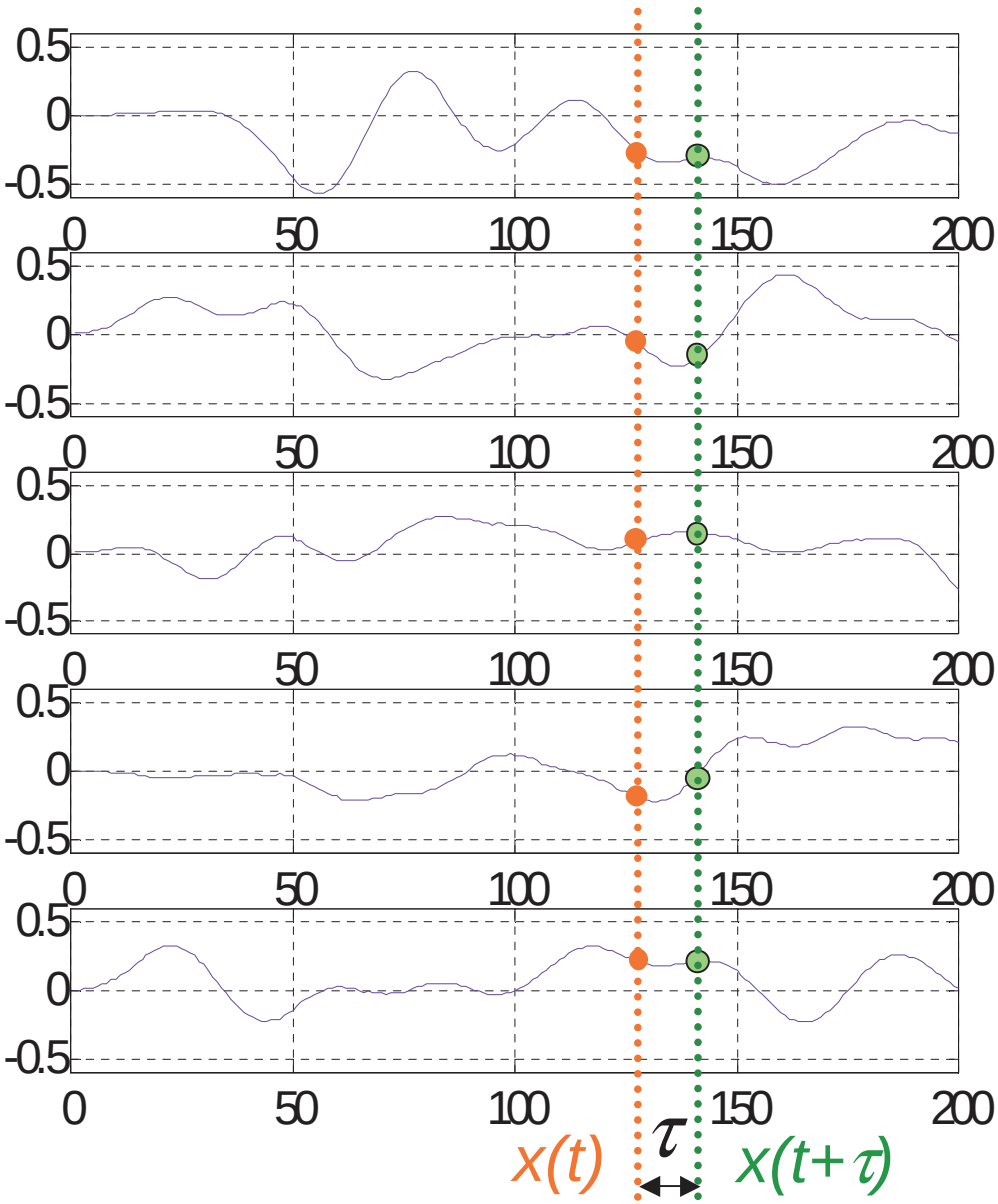
# Autocorrelazione di un processo casuale stazionario (2)

*Esempi di realizzazioni di un processo (con valor medio nullo) che varia lentamente*

Se ***x(t)*** ***varia lentamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è solitamente poco diverso** da ***x(t)***: il prodotto $x_i(t)x_i(t+\tau)$ ha segno positivo per quasi tutte le realizzazioni.

Per $\tau = 0$ l'autocorrelazione è la varianza del processo; per $\tau > 0$ è minore.

$$R_x(\tau) = E[x(t)\,x(t+\tau)]$$
$$R_x(0) = E[x^2(t)]$$

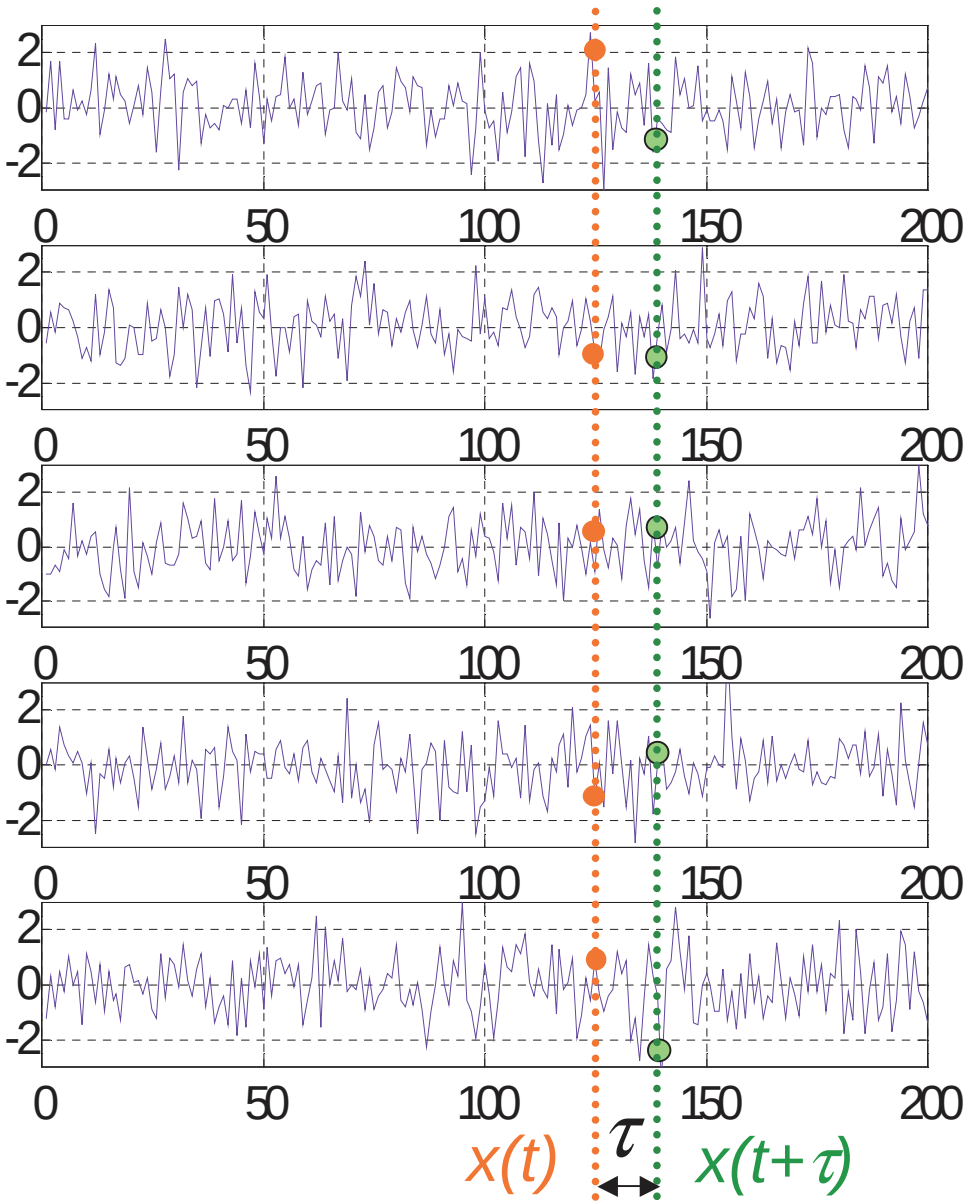


# Autocorrelazione di un processo casuale stazionario (3)

*Esempi di realizzazioni di un processo (con valor medio nullo) che varia rapidamente*

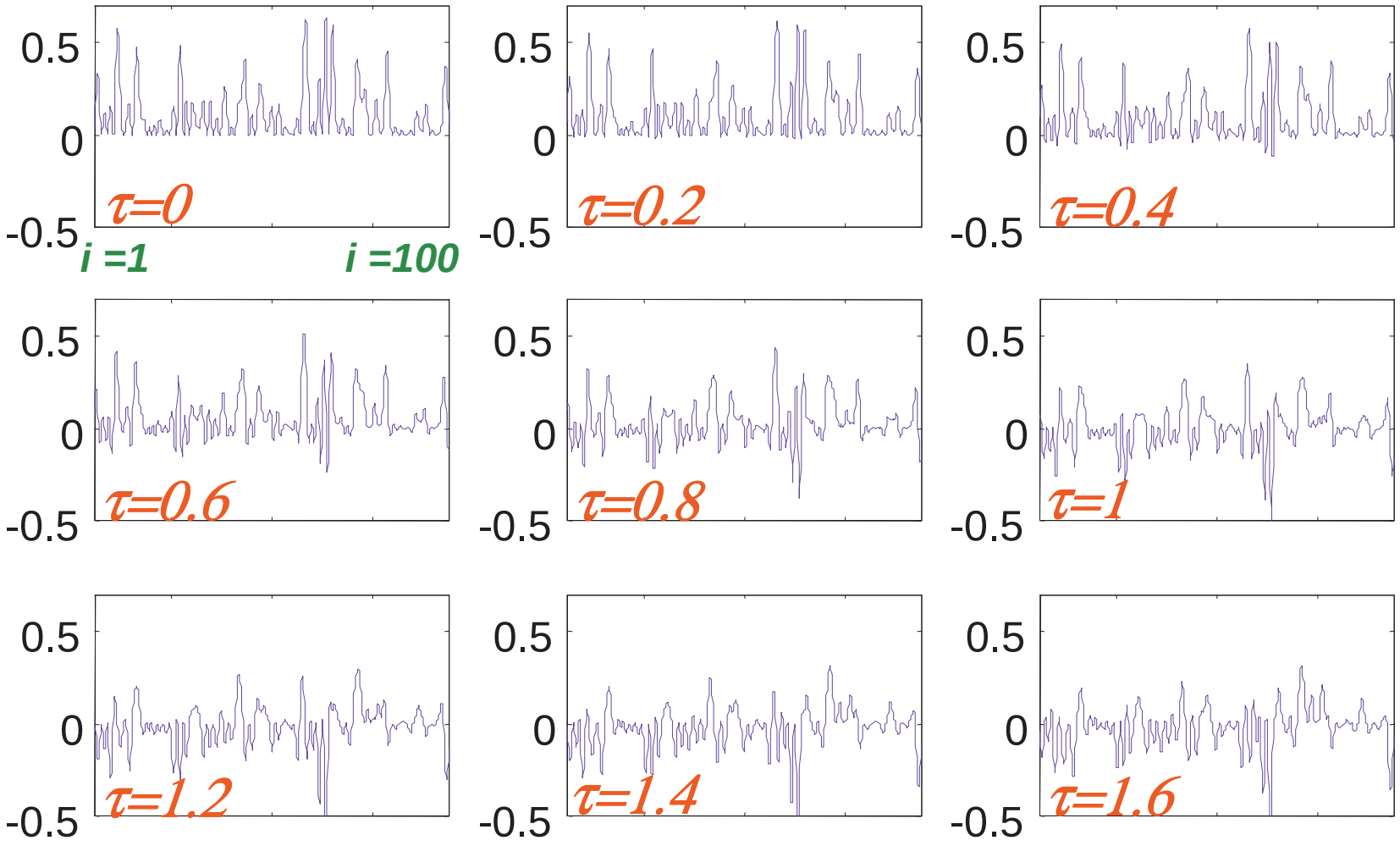
Se ***x(t)*** ***varia rapidamente nel tempo*****,** ***x(t+τ)*** **è spesso molto diverso** da ***x(t)***: il prodotto $x_i(t)x_i(t+\tau)$ ha segno casuale nelle varie realizzazioni e quindi l'autocorrelazione ha un valore prossimo a zero.

$$R_x(\tau) = E[x(t)\,x(t+\tau)]$$

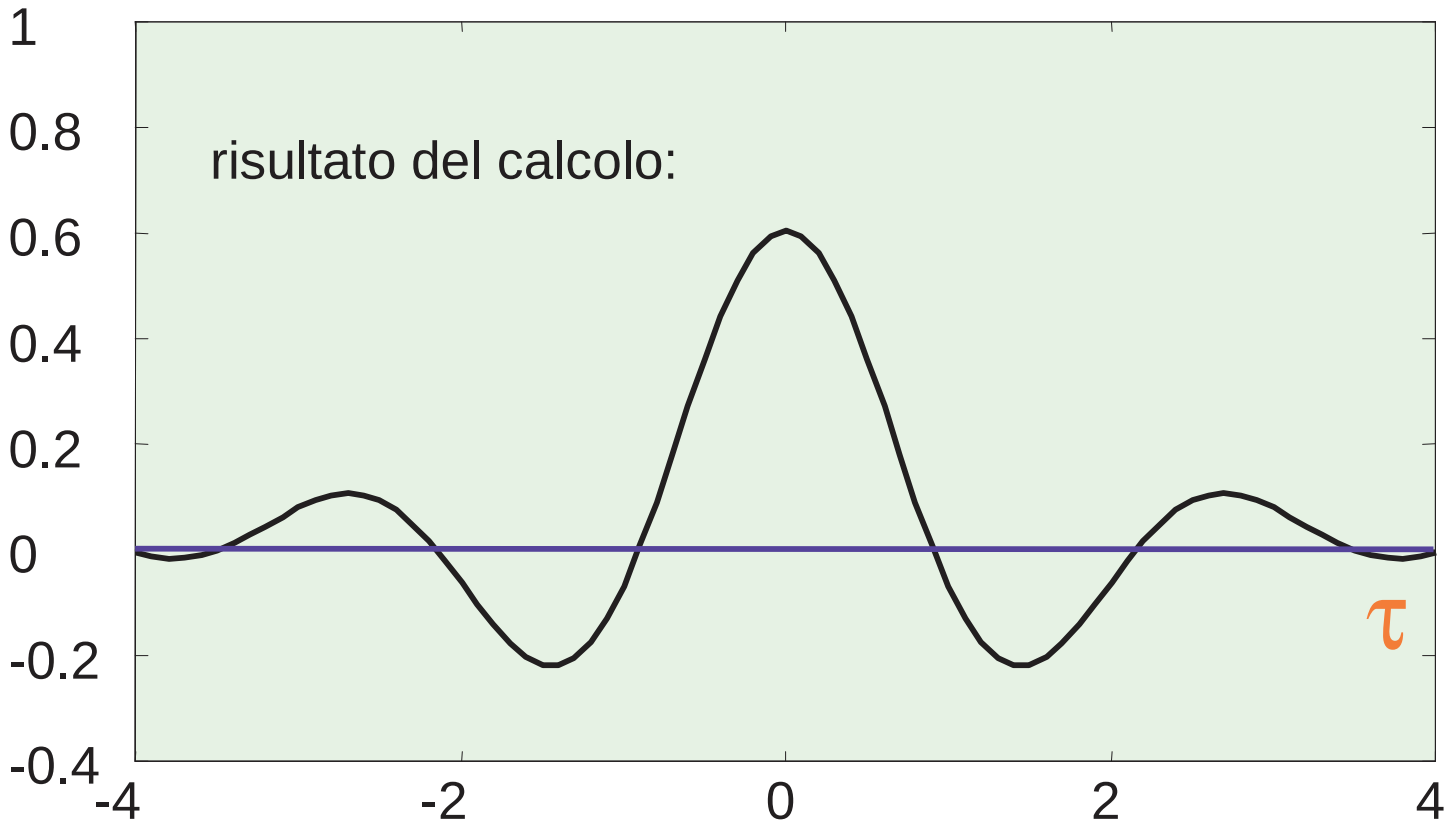


# Esempio di valutazione dell'autocorrelazione (1)

$$x_i(t)\,x_i(t+\tau)$$



# Esempio di valutazione dell'autocorrelazione (2)



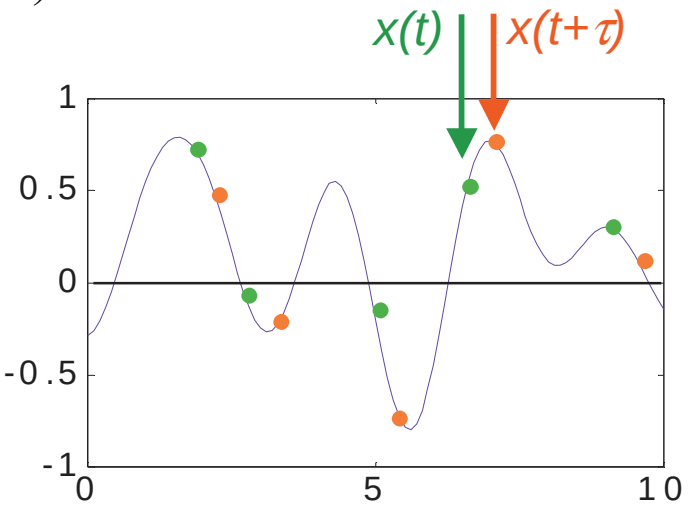

Nota: è evidente, dalla definizione di autocorrelazione, che per qualsiasi processo casuale stazionario $R_x(\tau)$ è una funzione pari, cioè $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$.

# Autocorrelazione di una realizzazione (media temporale)

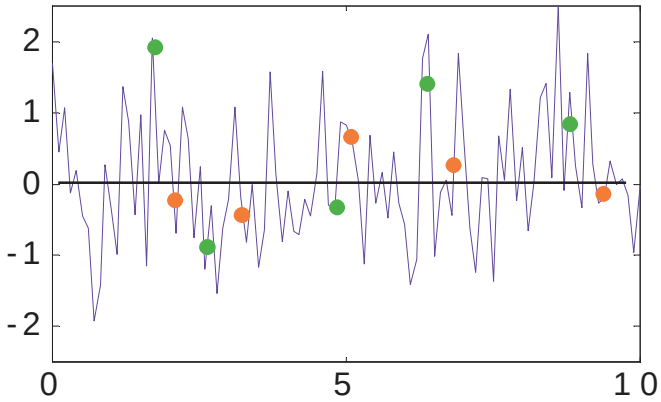
L'autocorrelazione di una singola realizzazione è definita come media nel tempo dei valori di $x(t)x(t+\tau)$:

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

In generale varia da una realizzazione all'altra. Se però il processo è ergodico, coincide con l'autocorrelazione definita sull'insieme di tutte le realizzazioni.




Se ***x(t)*** ***varia lentamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è poco diverso** da ***x(t)***: il prodotto ***x(t)x(t+τ)*** ha segno molto spesso positivo, e l'autocorrelazione assume un valore relativamente elevato.




Se ***x(t)*** ***varia rapidamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è molto diverso** da ***x(t)***: il prodotto ***x(t)x(t+τ)*** ha segno casuale, e l'autocorrelazione assume un valore prossimo a zero.

# Densità spettrale di potenza (definizione)

La **densità spettrale di potenza** di un processo casuale stazionario $x(t)$ è definita come la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione $R_x(\tau)$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\exp(j2\pi f\tau)df$$

*Perché $S_x(f)$ è una densità spettrale di potenza?*

**1** - Come si è visto l'autocorrelazione in $\tau = 0$ è, per un processo ergodico, uguale alla potenza associata ad una realizzazione:

$$R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt = P_x$$

**2** - L'autocorrelazione in $\tau = 0$ è anche uguale all'integrale della sua TDF:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = P_x$$

L'integrale della **densità spettrale di potenza** è quindi la potenza del processo $x(t)$. Si vedrà presto che $S_x(f)$ ha anche un significato fisico a ciascuna frequenza.

# Processi casuali attraverso sistemi LTI

Se un processo casuale *x(t)* stazionario passa attraverso un sistema lineare tempo-invariante con risposta all'impulso *h(t)* e risposta in frequenza *H(f)*, il processo casuale in uscita *y(t)* è stazionario ed ha seguenti caratteristiche:

***1 -*** Il valor medio del processo in uscita è dato da:

$$m_y = E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right] = m_x H(0)$$

***2 -*** L'autocorrelazione del processo in uscita è data da:

$$R_y(\tau) = E\left[\left((x(t) * h(t)\right)\left((x(t+\tau) * h(t+\tau)\right)\right] = ....$$

$$= R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \qquad \text{(dopo alcuni passaggi)}$$

***3 -*** La densità spettrale di potenza del processo in uscita è quindi data da:

$$S_y(f) = S_x(f)H(f)H(-f) = S_x(f)\left|H\left(f\right)\right|^2$$

***4 -*** La potenza del processo in uscita può essere calcolata indifferentemente come valore dell'autocorrelazione nell'origine o come integrale della densità spettrale di potenza.

# Densità spettrale di potenza (significato fisico)

Si supponga che il processo casuale *y(t)* sia ottenuto da *x(t)* attraverso un filtro ideale passa banda centrato sulla frequenza $f_o$ (e, simmetricamente, $-f_o$) con piccola banda $\Delta f$ . Si può ben dire che *y(t) contiene le sole frequenze di x(t) nella banda del filtro, cioè in un intorno di* $\pm f_o$ ! Se $\Delta f$ è sufficientemente piccolo si ha

$$S_y(f) = S_x(f_o) \quad \text{per} \quad f_o - \Delta f/2 < f < f_o + \Delta f/2$$

e simmetricamente intorno a $-f_o$. La potenza di *y(t)*, cioè la potenza di *x(t)* nelle bande $\Delta f$ , è data da

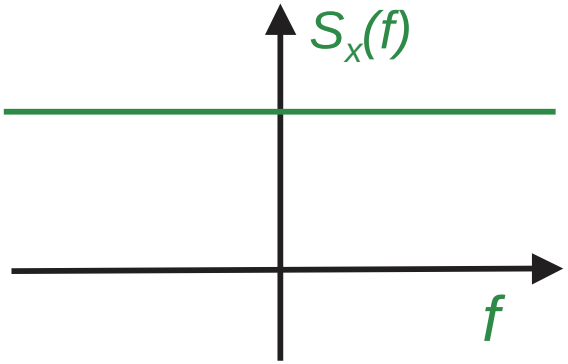
$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = 2S_x(f_0)\Delta f$$

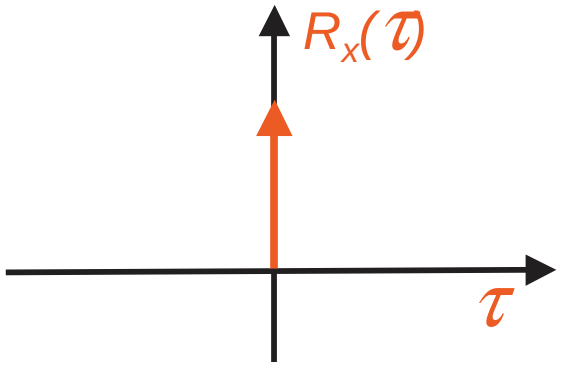
Dunque $S_x(f_0)$ ha effettivamente il significato di potenza per unità di banda in un intorno di $f_0$, cioè di densità spettrale di potenza. Nota: l'aggettivo "spettrale" viene usato per indicare tutto ciò che si riferisce al "dominio" delle frequenze. Si noti che metà della potenza è attribuita alle frequenze negative! Poiché ciò ha poco senso fisico, spesso si preferisce definire una densità spettrale unilatera (doppia della "bilatera"; è ovvio che poi nei calcoli si considerano le sole frequenze positive!) IMPORTANTE: la densità spettrale di potenza non può essere negativa (a nessuna frequenza: filtrando si otterrebbe un processo *y(t)* con potenza negativa!!)

# Processi casuali bianchi (1)

Si dice **bianco** un **processo casuale** con **densità spettrale di potenza costante**.
Quindi un **processo casuale bianco** ha **autocorrelazione impulsiva**.

Si tratta, evidentemente, di una idealizzazione (anche la luce che diciamo "bianca", da cui deriva il nome, ha spettro che non si estende all'infinito). Notiamo che un processo veramente bianco avrebbe potenza infinita!
Nel mondo reale osserviamo solo processi filtrati (con banda più o meno larga). Se la banda del processo in ingresso è più larga di quella del filtro, possiamo assegnare valori arbitrari alla densità spettrale fuori banda (senza che cambino i risultati del calcolo). Un valore costante è il più comodo dal punto di vista matematico.




Nota: l'autocorrelazione impulsiva significa che il valore $x(t+\tau)$ del processo bianco al tempo $t+\tau$ è assolutamente impredicibile dal valore $x(t)$ all'istante $t$: il processo varia in modo infinitamente rapido!

# Processi casuali bianchi (2)

Solitamente la densità spettrale di un processo casuale *x(t)* **bianco** viene indicata con $S_x(f)=N_0/2$ e quindi la funzione di autocorrelazione con $R_x(\tau)= N_0/2\ \delta(\tau)$.
Nota: si indica quindi con $N_0$ la densità spettrale di potenza unilatera.

E' importante saper calcolare la potenza di un processo *y(t)* ottenuto da un processo bianco *x(t)* attraverso un filtro con risposta all'impulso *h(t)* e risposta in frequenza *H(f)*. Si ha

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\left|H(f)\right|^2 df =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

Nota: un risultato del tutto analogo si ottiene se si calcola la varianza di una variabile casuale *y* ottenuta come somma pesata, con pesi *w(t)*, dei valori del processo *x(t)*:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t)dt \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)dt$$

# Processi casuali attraverso sistemi LTI (continua)

***5 -*** In generale la densità di probabilità del processo in uscita *y(t)* è diversa da quella dell'ingresso *x(t)*, e non semplice da calcolare. Solo la *densità di probabilità gaussiana* rimane tale nel passaggio attraverso sistemi lineari.

***6 -*** Si può anche definire la correlazione mutua tra uscita *y(t)* e ingresso *x(t)*:

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t+\tau)x(t)]$$

E' facile mostrare che:

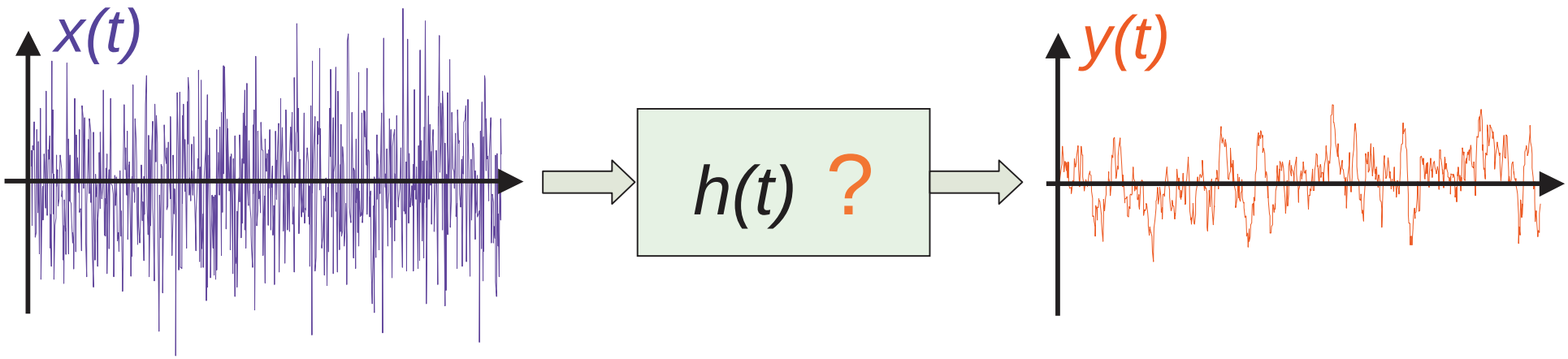
$$R_{yx}(\tau) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau-z)\,h(z)\,dz\,x(t)\right] = R_x(\tau) * h(\tau)$$

Se il processo d'ingresso è bianco (autocorrelazione impulsiva), la correlazione mutua tra uscita e ingresso è proporzionale alla risposta all'impulso del sistema:

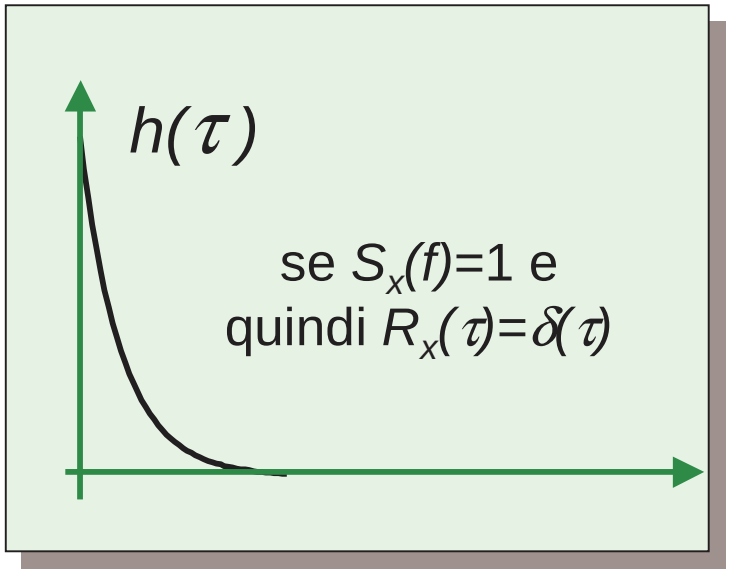
$$R_{yx}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * h(\tau) = \frac{N_0}{2}h(\tau)$$

Questa proprietà può essere utilizzata, nei sistemi di telecomunicazione, per stimare la risposta impulsiva di un canale di trasmissione ignoto *a priori*.

# Misura di una risposta impulsiva




Avendo una sola realizzazione del processo si calcola la correlazione mutua come

$$\mathcal{R}_{yx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t+\tau)\, x(t)\, dt$$

=