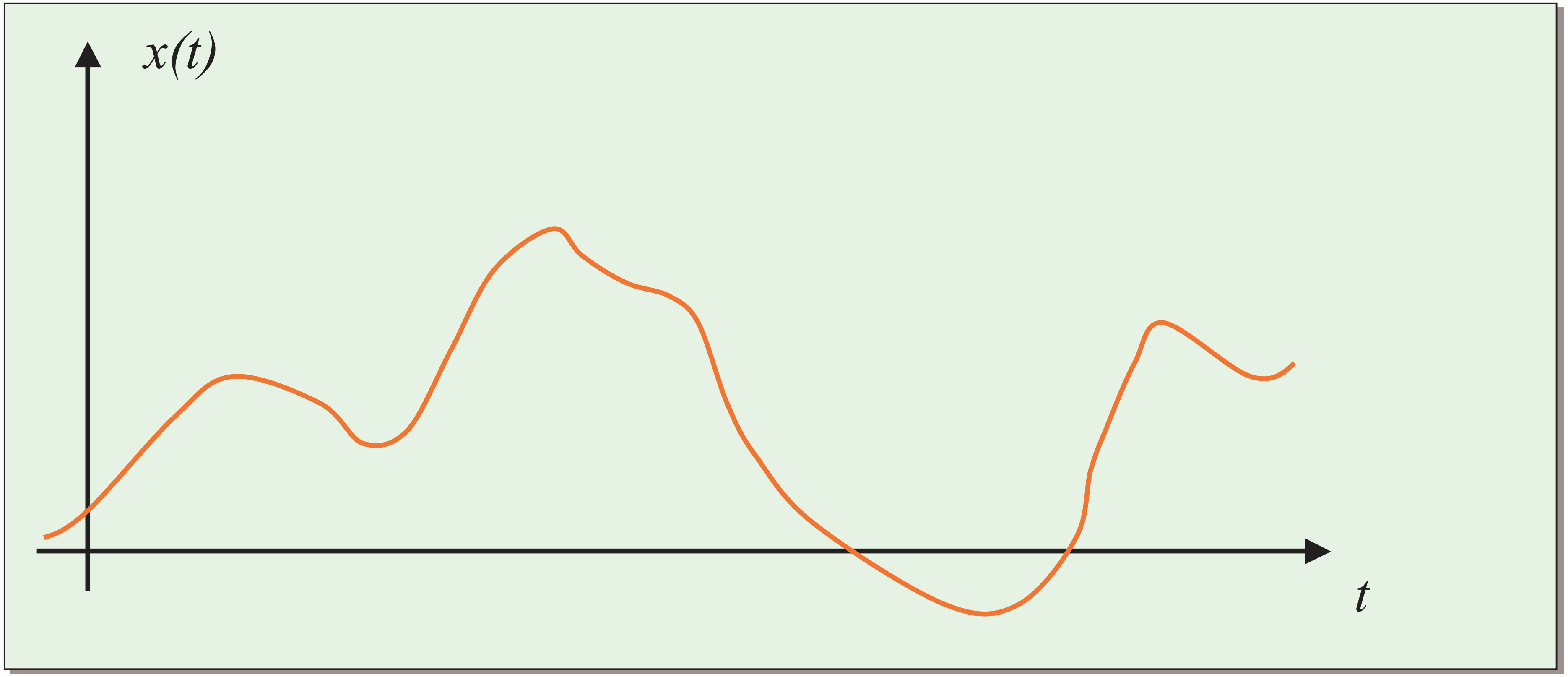
CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE DI SEGNALI

Segnali in formato numerico

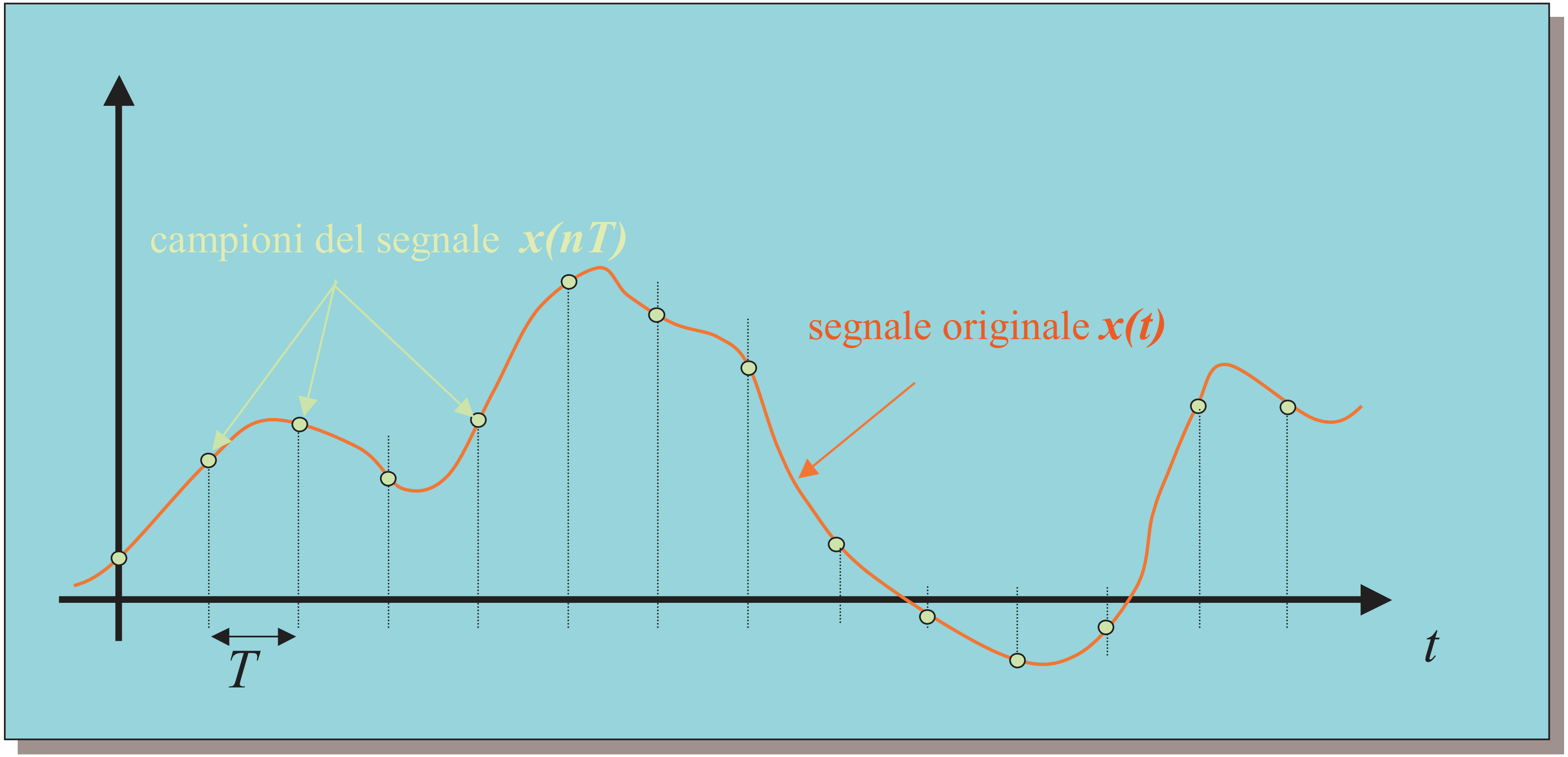
- Nei moderni sistemi di memorizzazione e trasmissione i segnali in ingresso sono di tipo **numerico,** normalmente rappresentati in **formato binario {0,1}**.
- In alcuni casi (si pensi ad esempio alle informazioni sulle operazione valutarie che le banche si scambiano fra loro) i segnali da elaborare e trasmettere sono segnali **numerici** gia' **all'origine** (la sorgente stessa e' numerica).
- In alcuni casi la rappresentazione numerica dei segnali originari e' molto semplice (alle lettere di un testo può essere facilmente associato un codice numerico ad es. binario: *a = 00001, b = 00010, c = 00011*, ecc.).
- In molti altri casi, invece, la rappresentazione numerica dei segnali originari richiede un'analisi più accurata. Come si puo', ad esempio, rappresentare numericamente il segnale tempo-continuo in uscita da un microfono?

Molti dei segnali con cui abbiamo a che fare nella realtà quotidiana sono continui sia nel tempo sia nelle ampiezze.



La rappresentazione di un segnale **continuo** con un segnale **numerico** richiede di discretizzare sia il tempo sia le ampiezze.

Campionare i segnali (discretizzare nel tempo)



- T e' detto **periodo (o passo) di campionamento**
- $f_c=1/T$ e' detta **frequenza di campionamento**

Segnale campionato con impulsi ideali (2)

Dalle proprieta' della trasformata di Fourier (moltiplicazione per esponenziali complessi, oppure convoluzione delle trasformate) e' immediato verificare che il segnale campionato ha come trasformata di Fourier la ripetizione periodica della trasformata *X(f)* del segnale continuo *x(t)*, con periodo pari alla frequenza di campionamento $f_c=1/T$, moltiplicata per $f_c=1/T$

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k/T)$$

Se le infinite repliche traslate in frequenza di *X(f)* non si sovrappongono e' facile estrarre mediante filtraggio *X (f)* da $X_c(f)$, cioe' riottenere *x(t)* da $x_c(t)$. Ovviamente cio' richiede una conoscenza a priori della banda *B* occupata da *x(t)*. Tale valore e' disponibile, o facilmente misurabile, nella grande maggioranza dei casi di interesse pratico.

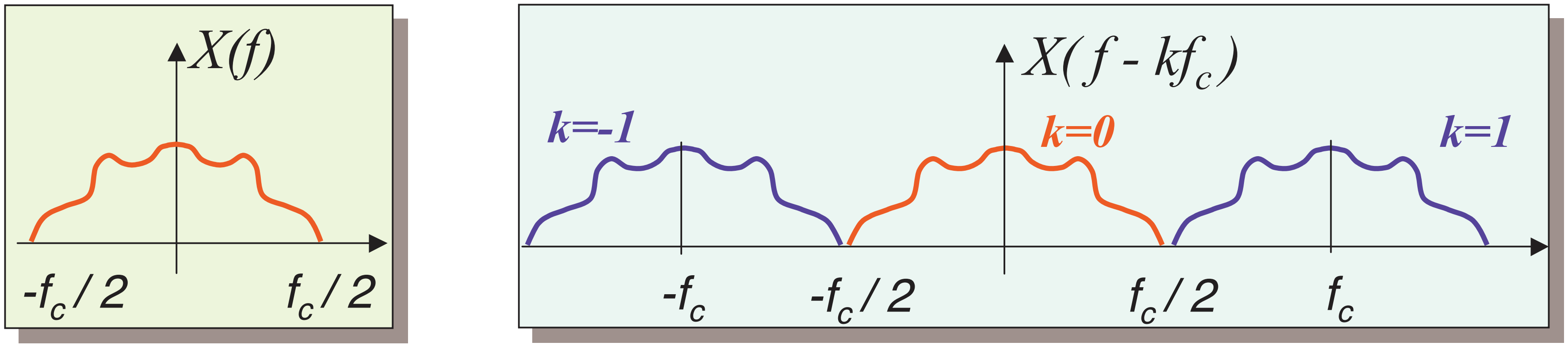
Teorema del campionamento

Se e' noto a priori che il segnale tempo continuo $x(t)$ non contiene frequenze maggiori di $f_c/2$ e inferiori a $-f_c/2$, esiste un legame univoco tra il segnale continuo nel tempo e i suoi campioni $x(nT)$.

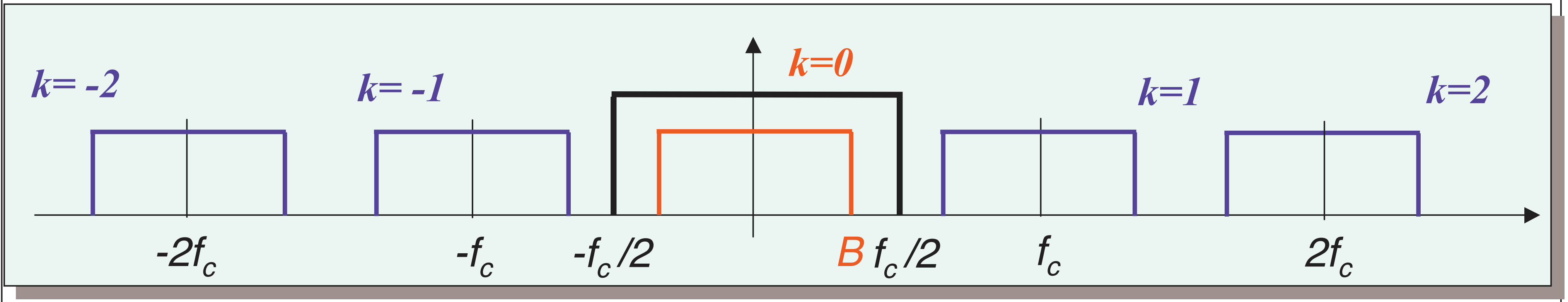
Se un segnale $x(t)$ e' campionato con frequenza di campionamento f_c almeno doppia della massima frequenza contenuta e' perfettamente ricostruibile (*le repliche in frequenza sono disgiunte*). Altrimenti le repliche sono sovrapposte e vi sono frequenze alle quali non e' possibile distinguere tra repliche diverse.

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

$$x(t)\exp(j2\pi f_c t) \xrightarrow{TF} X(f - kf_c)$$



La ricostruzione del segnale tempo-continuo (1)



(si e' scelta una frequenza di campionamento f_c maggiore del doppio della banda *B* del segnale; la trasformata *X(f)* rettangolare e' solo esemplificativa)

1 - La trasformata di Fourier del segnale campionato con impulsi e' quella del segnale tempo-continuo replicata a passo f_c in frequenza infinite volte.

2 - Per ottenere la trasformata di Fourier del segnale tempo-continuo da quella del segnale campionato con impulsi, bisogna eliminare tutte le repliche spettrali tranne quella in k=0.

3 - Per eliminare tutte le repliche spettrali tranne quella in k=0 e' sufficiente moltiplicare la trasformata di Fourier del segnale campionato con impulsi per un rettangolo con banda compresa tra $-f_c/2$ e $+f_c/2$.
*Si puo' cioe' utilizzare un **FILTRO PASSA-BASSO IDEALE**.*

Prefiltraggio del segnale (filtro *anti-aliasing*)

Se non si e' certi che la banda del segnale sia limitata ad un valore B (sulla base del quale si intende scegliere la frequenza di campionamento) e' necessario "prefiltrare" il segnale (cioe' filtrarlo prima del campionamento).

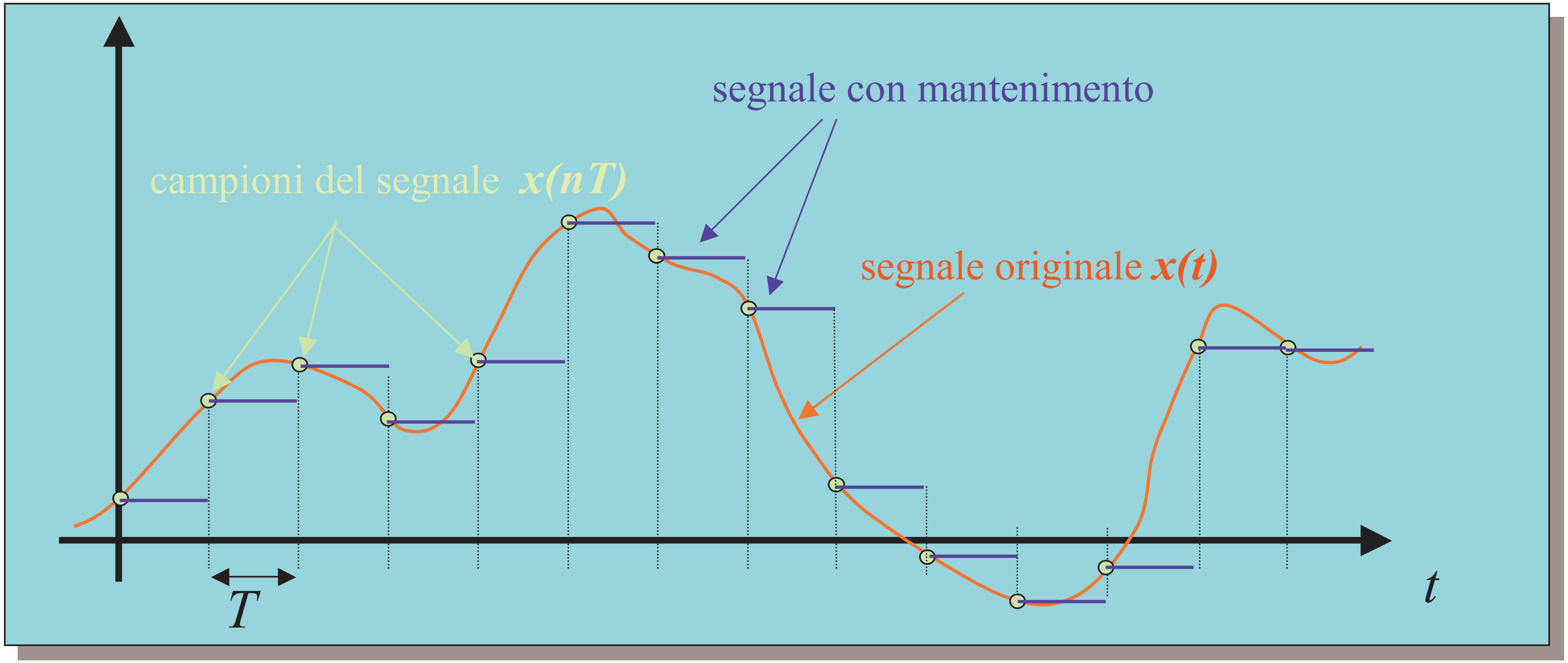
MEGLIO PERDERE SUBITO COMPONENTI IN FREQUENZA CHE NON SI E' IN GRADO DI RAPPRESENTARE IN MODO NON AMBIGUO, PIUTTOSTO CHE RITROVARSELE CONVERTITE AD UNA DIVERSA FREQUENZA DALLE OPERAZIONI DI CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE (ERRORE DA SPETTRO ADIACENTE).

Il "prefiltro" (filtro *anti-aliasing*) ha caratteristiche molto simili al filtro di ricostruzione (spesso e' uguale, per utilizzare due volte un unico progetto).

Esempi: nel CD audio si prefiltra il segnale musicale in modo che abbia banda $B = 20$ kHz (largamente sufficiente per una ottima qualita') e poi si campiona a frequenza $f_c = 44.1$ kHz. Invece il segnale telefonico viene spesso campionato alla frequenza $f_c = 8$ kHz. In questo caso il prefiltro ha banda $B < 4$ kHz (se trasmettete musica non aspettatevi alta fedelta').

Complementi (2): ricostruzione con mantenimento

Nella ricostruzione con filtri a tempo continuo si possono anche usare rettangoli di durata *T*, cioe' si puo' inviare al filtro di ricostruzione il segnale "mantenuto".



Infatti sostituire gli impulsi ideali con rettangoli di durata *T* e' come applicare un primo filtraggio con risposta impulsiva rettangolare, cioe' con risposta in frequenza $H_m(f) = \mathrm{sinc}(fT)$. Basta progettare un filtro di ricostruzione (non ideale!) con risposta in frequenza $H(f)/sinc(fT)$ <u>nella banda del segnale</u> anziche' $H(f)$.