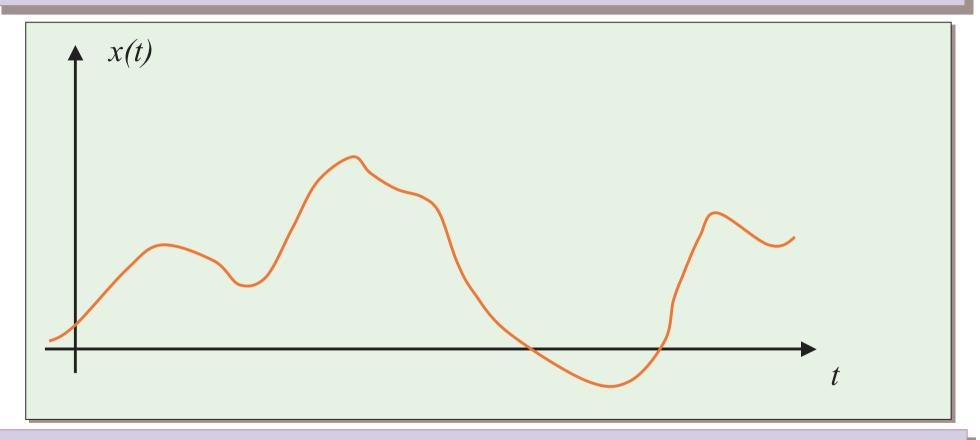


Segnali in formato numerico

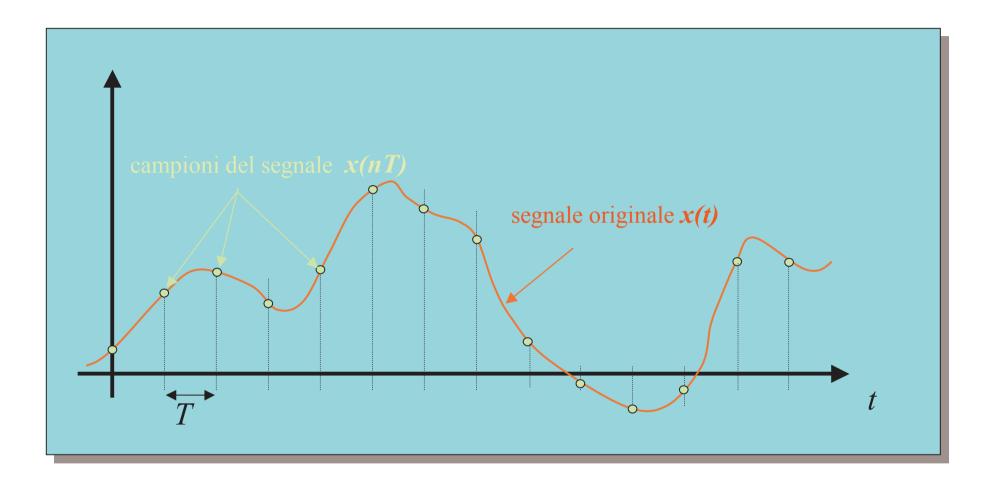
- Nei moderni sistemi di memorizzazione e trasmissione i segnali in ingresso sono di tipo **numerico**, normalmente rappresentati in **formato binario {0,1}**.
- In alcuni casi (si pensi ad esempio alle informazioni sulle operazione valutarie che le banche si scambiano fra loro) i segnali da elaborare e trasmettere sono segnali **numerici** gia' **all'origine** (la sorgente stessa e' numerica).
- In alcuni casi la rappresentazione numerica dei segnali originari e' molto semplice (alle lettere di un testo può essere facilmente associato un codice numerico ad es. binario: a = 00001, b = 00010, c = 00011, ecc.).
- In molti altri casi, invece, la rappresentazione numerica dei segnali originari richiede un'analisi più accurata. Come si puo', ad esempio, rappresentare numericamente il segnale tempo-continuo in uscita da un microfono?

Molti dei segnali con cui abbiamo a che fare nella realtà quotidiana sono continui sia nel tempo sia nelle ampiezze.



La rappresentazione di un segnale **continuo** con un segnale **numerico** richiede di discretizzare sia il tempo sia le ampiezze.

Campionare i segnali (discretizzare nel tempo)



- T e' detto periodo (o passo) di campionamento
- $f_c = 1/T$ e' detta frequenza di campionamento

Segnale campionato con impulsi ideali (1)

Alla sequenza di campioni x(nT) si puo' associare il "segnale campionato"

$$x_c(t) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x(nT) \, \delta(t - nT) = x(t) \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

che e' il <u>prodotto</u> del segnale x(t) e della ripetizione periodica dell'impulso ideale con periodo T, che ha come sviluppo in serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi k t/T)$$

e come trasformata di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \xrightarrow{TF} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k/T)$$

Segnale campionato con impulsi ideali (2)

Dalle proprieta' della trasformata di Fourier (moltiplicazione per esponenziali complessi, oppure convoluzione delle trasformate) e' immediato verificare che il segnale campionato ha come trasformata di Fourier la ripetizione periodica della trasformata X(f) del segnale continuo x(t), con periodo pari alla frequenza di campionamento $f_c=1/T$, moltiplicata per $f_c=1/T$

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k/T)$$

Se le infinite repliche traslate in frequenza di X(f) non si sovrappongono e' facile estrarre mediante filtraggio X(f) da $X_c(f)$, cioe' riottenere x(t) da $x_c(t)$. Ovviamente cio' richiede una conoscenza a priori della banda B occupata da x(t). Tale valore e' disponibile, o facilmente misurabile, nella grande maggioranza dei casi di interesse pratico.

Teorema del campionamento

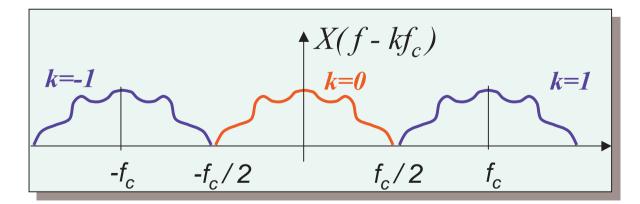
Se e' noto a priori che il segnale tempo continuo x(t) non contiene frequenze maggiori di $f_c/2$ e inferiori a $-f_c/2$, esiste un legame univoco tra il segnale continuo nel tempo e i suoi campioni x(nT).

Se un segnale x(t) e' campionato con frequenza di campionamento f_c almeno doppia della massima frequenza contenuta e' perfettamente ricostruibile (*le repliche in frequenza sono disgiunte*). Altrimenti le repliche sono sovrapposte e vi sono frequenze alle quali non e' possibile distinguere tra repliche diverse.

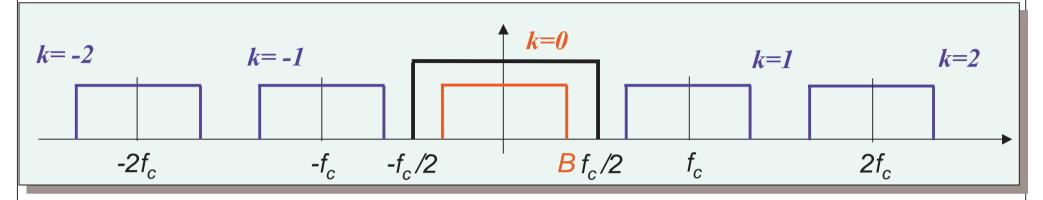
$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

$$-f_c/2$$
 $f_c/2$





La ricostruzione del segnale tempo-continuo (1)



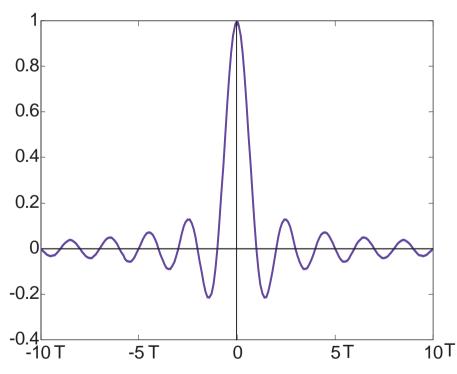
(si e' scelta una frequenza di campionamento f_c maggiore del doppio della banda B del segnale; la trasformata X(f) rettangolare e' solo esemplificativa)

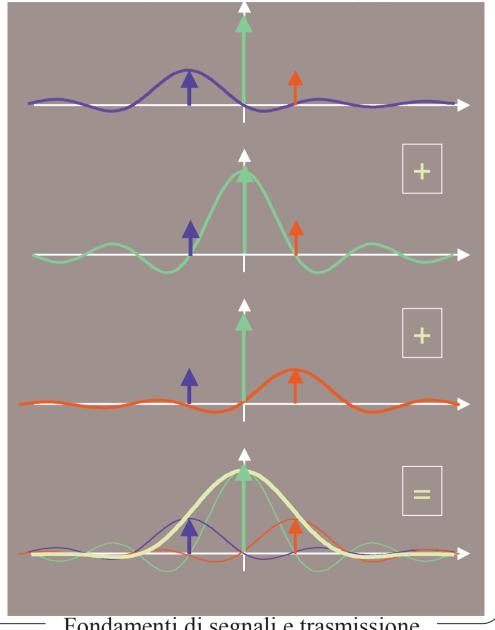
- 1 La trasformata di Fourier del segnale campionato con impulsi e' quella del segnale tempo-continuo replicata a passo f_c in frequenza infinite volte.
- 2 Per ottenere la trasformata di Fourier del segnale tempo-continuo da quella del segnale campionato con impulsi, bisogna eliminare tutte le repliche spettrali tranne quella in k=0.
- 3 Per eliminare tutte le repliche spettrali tranne quella in k=0 e' sufficiente moltiplicare la trasformata di Fourier del segnale campionato con impulsi per un rettangolo con banda compresa tra $-f_c/2$ e $+f_c/2$.

Si puo' cioe' utilizzare un FILTRO PASSA-BASSO IDEALE.

La ricostruzione del segnale tempo-continuo (2)

Il filtro passa-basso ideale con banda compresa tra $-f_c/2$ e $+f_c/2$, e che ha come risposta impulsiva un seno cardinale di ampiezza 1, ha <u>guadagno</u> $1/f_c=T$ che compensa esattamente il <u>guadagno</u> $1/T=f_c$ introdotto dal campionamento con impulsi di area unitaria.

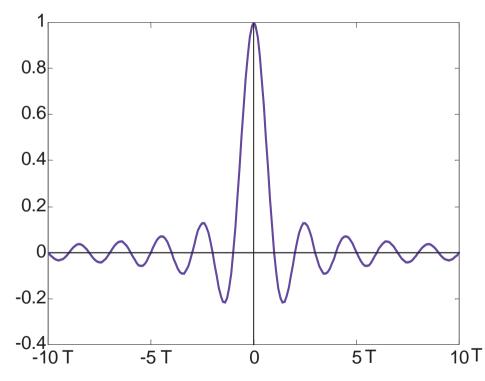


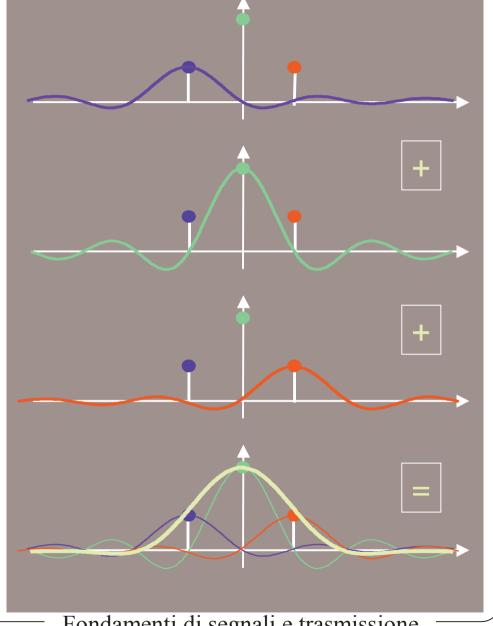


Fondamenti di segnali e trasmissione

La ricostruzione del segnale tempo-continuo (3)

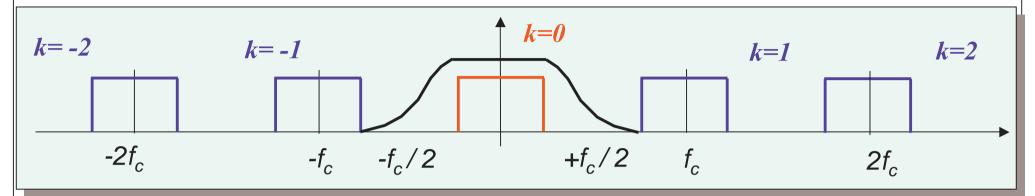
Operativamente non occorre passare attraverso un segnale impulsivo (che e' un'astrazione matematica) ne' occorre disporre di un filtro ideale passa basso. Basta sommare seni cardinali centrati ai tempi *nT*, con ampiezze x(nT) e zeri in t = mT per tutti gli $m \neq n$.





Fondamenti di segnali e trasmissione

La ricostruzione del segnale tempo-continuo (4)

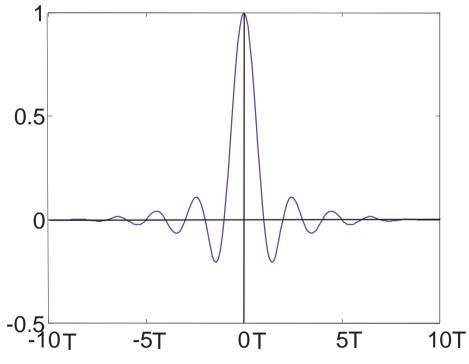


Se la <u>frequenza di campionamento e' maggiore del</u> <u>doppio della massima frequenza del segnale</u> il filtro di ricostruzione puo' avere transizioni piu' "morbide".

La risposta all'impulso non e' il seno cardinale (<u>non</u> <u>realizzabile!</u>) e puo' avere durata praticamente finita.

Si deve sempre campionare ad una frequenza un po' maggiore del doppio della banda del segnale.

Se si utilizza un filtro di ricostruzione a tempo continuo non occorre (ne' sarebbe possibile) inviare all'ingresso impulsi ideali. Rettangoli di breve durata sono del tutto equivalenti, nella banda del segnale da ricostruire.



Fondamenti di segnali e trasmissione

Prefiltraggio del segnale (filtro anti-aliasing)

Se non si e' certi che la banda del segnale sia limitata ad un valore *B* (sulla base del quale si intende scegliere la frequenza di campionamento) e' necessario "prefiltrare" il segnale (cioe' filtrarlo prima del campionamento).

MEGLIO PERDERE SUBITO COMPONENTI IN FREQUENZA CHE NON SI E' IN GRADO DI RAPPRESENTARE IN MODO NON AMBIGUO, PIUTTOSTO CHE RITROVARSELE CONVERTITE AD UNA DIVERSA FREQUENZA DALLE OPERAZIONI DI CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE (ERRORE DA SPETTRO ADIACENTE).

Il "prefiltro" (filtro anti-aliasing) ha caratteristiche molto simili al filtro di ricostruzione (spesso e' uguale, per utilizzare due volte un unico progetto).

Esempi: nel CD audio si prefiltra il segnale musicale in modo che abbia banda B = 20 kHz (largamente sufficiente per una ottima qualita') e poi si campiona a frequenza $f_c = 44.1 \text{ kHz}$. Invece il segnale telefonico viene spesso campionato alla frequenza $f_c = 8 \text{ kHz}$. In questo caso il prefiltro ha banda B < 4 kHz (se trasmettete musica non aspettatevi alta fedelta').

Complementi (1): posizione temporale dei campioni

L'istante di tempo t=0 in cui si e' fatto finora cadere uno dei campioni non ha nulla di "magico": non si puo' definire in modo assoluto dove sia l'origine dei tempi!

Dunque non deve cambiare nulla di sostanziale se si spostano gli istanti di campionamento da nT a $nT+t_0$. E' facile verificare che il segnale campionato

$$x_{c}(t) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} x(nT + t_{0}) \, \delta(t - nT - t_{0}) = x(t) \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta(t - nT - t_{0})$$

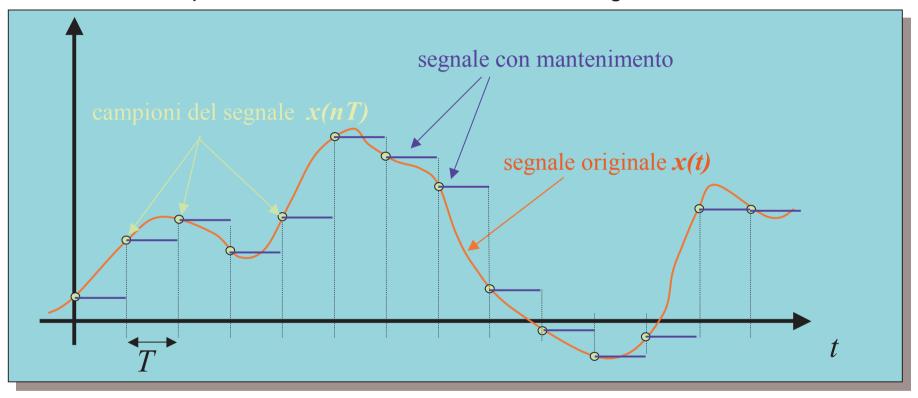
ha come trasformata di Fourier

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k/T) \exp(-j2\pi k t_0/T)$$

e dunque <u>per k=0</u> (replica desiderata della trasformata) <u>non cambia nulla</u>. L'eventuale disturbo dalle repliche adiacenti (da evitare campionando come si deve!) e' invece diverso. Se si campiona malamente (<u>sottocampionamento</u>) il segnale ricostruito e' <u>diverso dall'originale</u>, e <u>varia un po' con t_0 </u>.

Complementi (2): ricostruzione con mantenimento

Nella ricostruzione con filtri a tempo continuo si possono anche usare rettangoli di durata T, cioe' si puo' inviare al filtro di ricostruzione il segnale "mantenuto".



Infatti sostituire gli impulsi ideali con rettangoli di durata T e' come applicare un primo filtraggio con risposta impulsiva rettangolare, cioe' con risposta in frequenza $H_m(f) = \operatorname{sinc}(fT)$. Basta progettare un filtro di ricostruzione (non ideale!) con risposta in frequenza $H(f)/\operatorname{sinc}(fT)$ nella banda del segnale anziche' H(f).

Complementi (3): sovracampionamento numerico

Realizzare filtri di ricostruzione a tempo continuo con risposta in frequenza molto precisa non e' facile, soprattutto se la frequenza di campionamento e' poco maggiore del doppio della banda del segnale. Inoltre i filtri realizzati con tecnologie analogiche non conservano immutate le loro caratteristiche con il passare del tempo (invecchiano! e avrebbero bisogno di essere nuovamente tarati), nonche' al variare della temperatura, ecc.

Per facilitare notevolmente la ricostruzione con filtri a tempo continuo si possono prima calcolare <u>numericamente</u> campioni intermedi non disponibili (ad esempio 8 campioni per ogni intervallo di campionamento *T*) e <u>poi</u> filtrare con un semplice filtro a tempo continuo.

I campioni intermedi possono essere calcolati numericamente con elevata precisione. E' quindi come se si fosse campionato all'origine con frequenza piu' elevata, ad esempio 8 volte piu' grande. La separazione in frequenza tra trasformata del segnale desiderato e repliche adiacenti e' a questo punto cosi' grande che anche semplicissimi filtri a tempo continuo ricostruiscono esattamente il segnale.

E' una tecnica utilizzata molto spesso (ad esempio nella ricostruzione del segnale audio dal CD).

Complementi (4): segnali complessi e passa banda

Nel campionamento di <u>segnali complessi</u> non cambia nulla, salvo il fatto che la trasformata di Fourier di un segnale complesso puo' essere <u>non simmetrica</u> rispetto allo zero: puo' ad esempio occupare l'intervallo di frequenze da $-B_1$ a B_2 . In tal caso e' facile verificare che non si ha sovrapposizione tra repliche della trasformata X(f) se la frequenza di campionamento e' (almeno) $B_1 + B_2$.

Nel caso di <u>segnali</u> (reali) <u>passa banda</u> occorre analizzare con un po' piu' di attenzione come si dispongono le repliche della trasformata: la parte a frequenze negative, traslata, puo' interferire con le frequenze positive, e viceversa! Se si suppone per semplicita' che la frequenza centrale f_0 sia un <u>multiplo dispari</u> di B/2 non e' difficile verificare che tutto funziona con frequenza di campionamento $f_c = 2B$ (ma <u>attenzione</u>: se si aumenta la frequenza di campionamento ...).

Attenzione: il filtro di ricostruzione deve essere un passa banda!

Attenzione: se la frequenza f_0 e' molto elevata bastano piccoli errori nell'istante di campionamento per sbagliare di molto la lettura del valore del campione. Il campionamento di segnali passa banda richiede molta cautela!

Dualita' tra serie di Fourier e segnali campionati

E' interessante osservare che <u>dal punto di vista matematico serie di</u> <u>Fourier e campionamento sono del tutto equivalenti</u> (e' un esempio notevole di dualita'). Nel primo caso la forma d'onda nel tempo e' periodica (ripetizione di un periodo della forma d'onda) e la trasformata di Fourier e' discreta (campionata). Nel secondo caso e' campionato il segnale ed e' periodica la trasformata di Fourier (ripetizione della trasformata del segnale).

Dal punto di vista delle applicazioni serie di Fourier e campionamento sono invece profondamente diversi, perche' da un punto di vista fisico tempo e frequenza sono ben distinti. Mentre una sequenza discreta di campioni e' quasi sempre un "segnale" (che porta informazione ad un destinatario) spesso una forma d'onda periodica non e' un vero segnale (visto un periodo non c'e' altro di interessante da aspettarsi!).