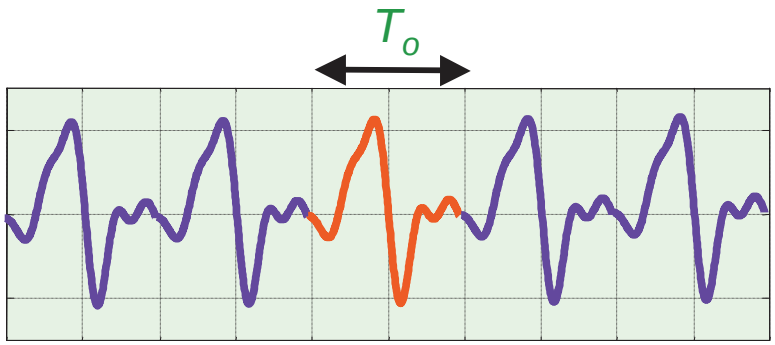
FORME D'ONDA PERIODICHE: RICHIAMI SULLA SERIE DI FOURIER

Sviluppo in serie di Fourier di forme d'onda periodiche (1)



Una funzione periodica con periodo T_o puo' essere rappresentata come *somma di esponenziali complessi* con **frequenza pari ad un multiplo intero della frequenza fondamentale** $f_o=1/T_0$ e con opportuna ampiezza e fase iniziale:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp\{j(2\pi k f_o t+\vartheta_k)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp\{j\vartheta_k\}\exp\{j2\pi k f_o t\}$$

Per maggior compattezza delle formule conviene introdurre il coefficiente complesso

$X_k = A_k \exp\{j\vartheta_k\}$ ottenendo:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp\{j2\pi\ k f_o t\}$$

Sviluppo in serie di Fourier di forme d'onda periodiche (2)

Le ampiezze A_k e le fasi ϑ_k degli esponenziali complessi (detti *componenti armoniche*), cioe' i coefficienti complessi X_k si trovano valutando gli integrali

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t)\ dt = \frac{1}{T_o} Y(k f_o)$$

ovvero basta calcolare la trasformata di Fourier della forma d'onda x(t) troncata ad un solo periodo, alle frequenze kf_0.

Lo sviluppo in componenti armoniche viene detto serie di Fourier e gli X_k sono chiamati coefficienti della serie di Fourier. Si puo' anche scrivere che la trasformata di Fourier della forma d'onda periodica e'

$$X(f) = \frac{1}{T_o} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_o) = \frac{1}{T_o} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(kf_o) \delta(f - kf_o)$$

Come si ottengono i coefficienti della serie di Fourier

Supponendo valida l'espansione in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t)$$

si ha effettivamente

$$\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t)\exp(-j2\pi k f_0 t)\ dt = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t)\exp(-j2\pi k f_0 t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi (n-k) f_0 t)\ dt = X_k$$

Infatti per ogni *n* diverso da *k* l'integrale dell'esponenziale complesso e' nullo in quanto si integra un numero intero di cicli.
Se *n=k* l'integrale dell'esponenziale complesso vale T_0 in quanto si integra una costante.

Serie di Fourier di segnali reali

Se *x(t)* e' reale l'espansione in serie di Fourier ha simmetria complessa coniugata (come si verifica facilmente; la proprieta' e' analoga a quella della trasformata di Fourier):

$$X_k = X_{-k}^* \qquad\qquad A_k \exp(j\vartheta_k) = A_{-k} \exp(-j\vartheta_{-k})$$

La serie di Fourier puo' essere scritta anche come somma di coseni e seni:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp\{j2\pi\ k\ f_o t\} =$$

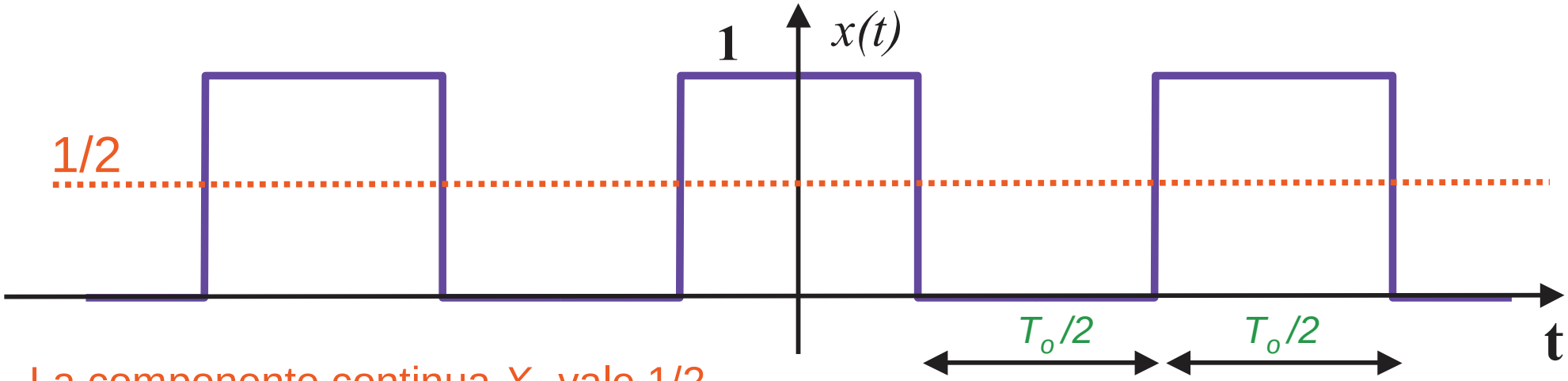
$$= X_o + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \exp\{j2\pi\ k\ f_o t\} + X_k^* \exp\{-j2\pi\ k\ f_o t\} =$$

$$= X_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{X_k\}\cos(2\pi\ k\ f_o t) - \mathrm{Im}\{X_k\}\sin(2\pi\ k\ f_o t) =$$

$$= X_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \cos(2\pi\ k\ f_o t + \vartheta_k)$$

In questa forma "trigonometrica" l'unica componente che non e' moltiplicata per 2 e' quella a frequenza zero, cioe' la componente continua del segnale.

Un esempio di espansione in serie di Fourier: onda quadra

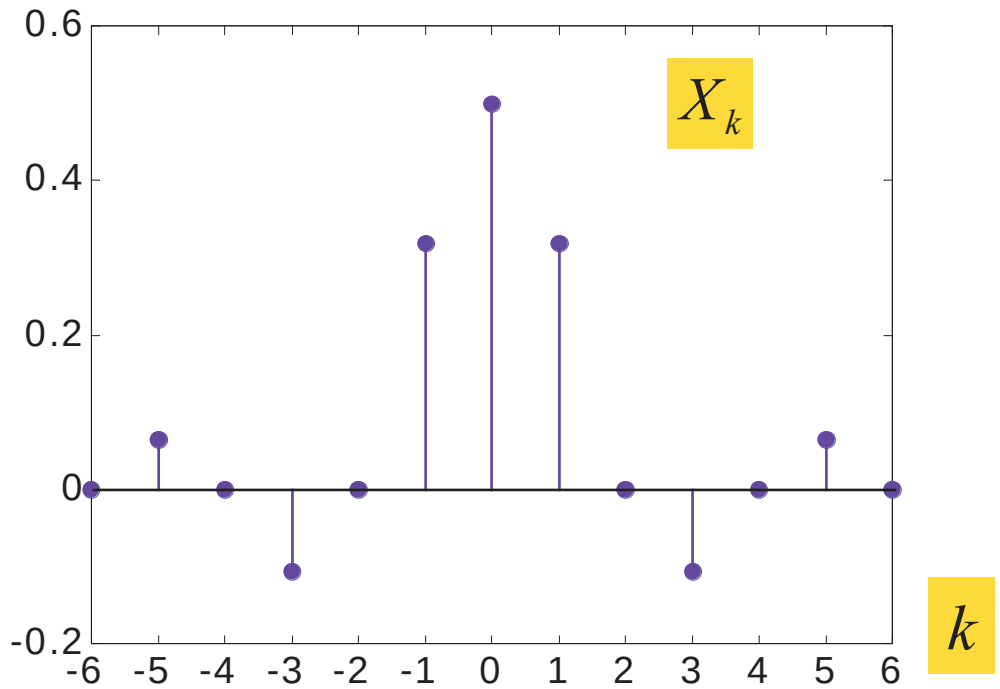


La componente continua X_0 vale 1/2

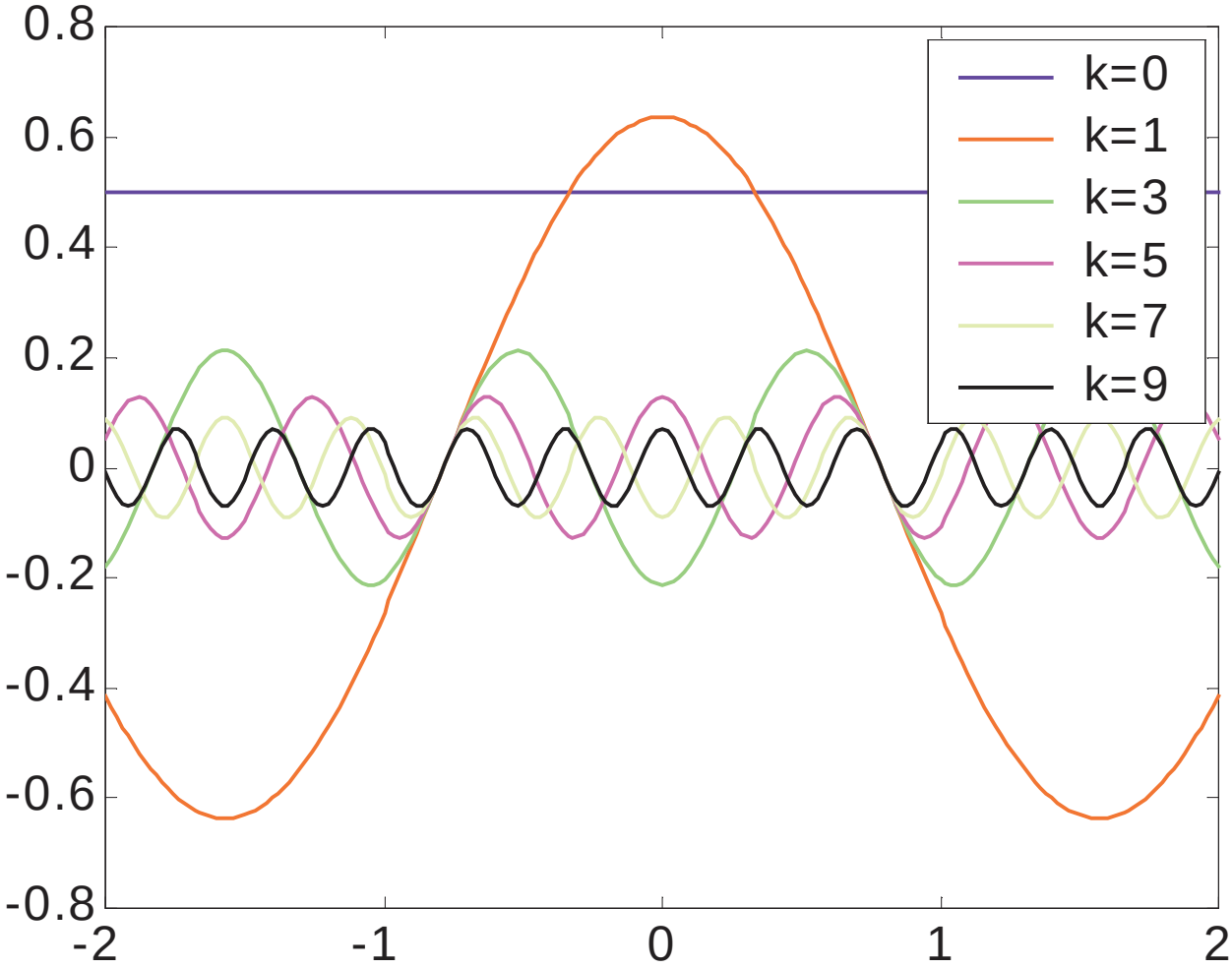
$$X_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/4}^{T_o/4} \exp\{-j2\pi\ k\ f_o t\}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/4}^{T_o/4} \cos\{2\pi\ k\ f_o t\}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2}$$

dove $\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$



Le prime 10 armoniche dell'onda quadra



$$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(X_k)\cdot\cos(2\pi k f_0 t) - \cancel{2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(X_k)\cdot\sin(2\pi k f_0 t)}$$

Espansione parziale in serie di Fourier dell'onda quadra