# RISPOSTA IN FREQUENZA DEI SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

# Introduzione

Se il segnale d'ingresso di un sistema Lineare Tempo-Invariante (LTI) e' un esponenziale complesso l'uscita sara' ancora un esponenziale complesso con la stessa frequenza, ma con ampiezza e fase modificate.

$$A\exp\{j(2\pi f_o t + \vartheta)\} \longrightarrow$$

**Sistema LTI**

*h(t)*

$$\longrightarrow B\exp\{j(2\pi f_o t + \varphi)\}$$

**Risposta in frequenza:**

E' la funzione della frequenza che descrive come vengono modificate ampiezza e fase di un esponenziale complesso quando passa attraverso un sistema LTI.

# Risposta in frequenza

$$x(t) = \exp\{j2\pi\ ft\}$$

**Sistema <u>L T I</u>**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\ h(\tau)\ d\tau$$

$$y(t) = \exp\{j2\pi\ ft\} \cdot H(f)$$

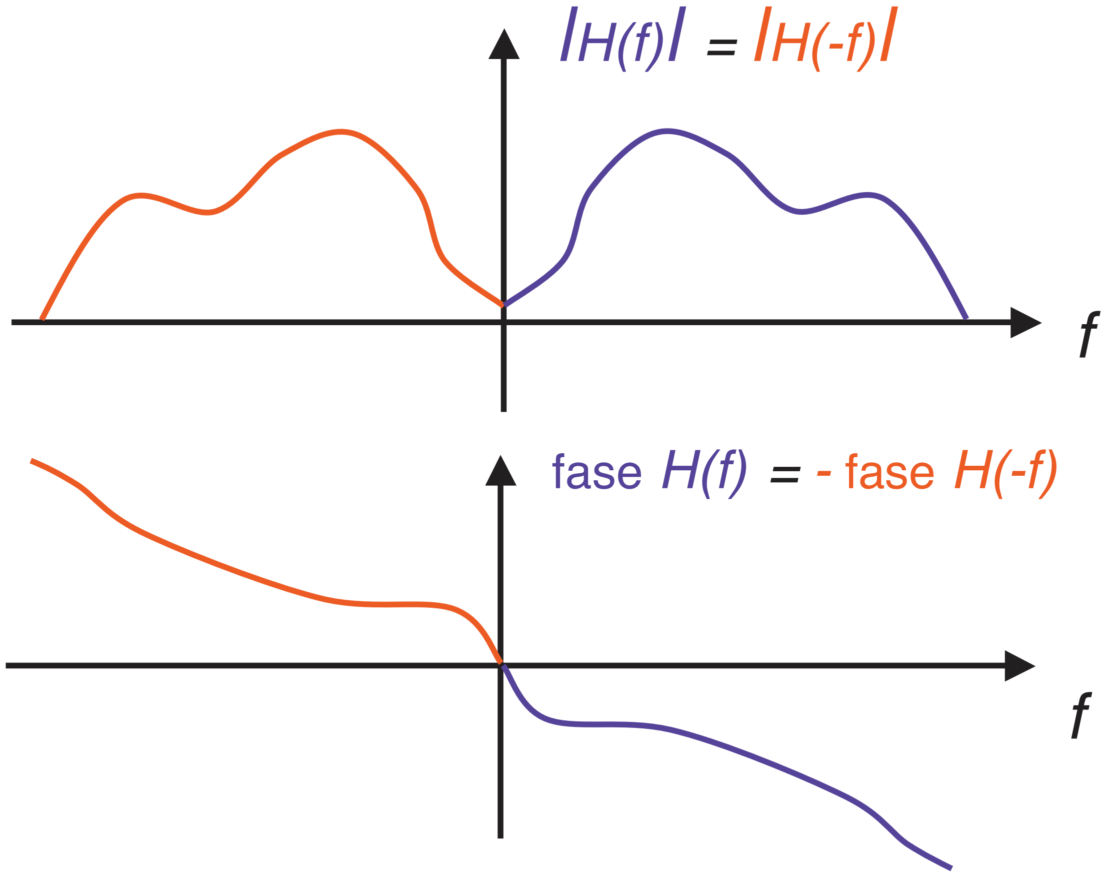
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j2\pi\ f(t-\tau)\}\ h(\tau)\ d\tau = \exp\{j2\pi\ ft\} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ \exp\{-j2\pi\ f\tau\}\ d\tau =$$

$$= \exp\{j2\pi\ ft\}\ H(f)$$

L'uscita di un sistema LTI alimentato da un ingresso esponenziale complesso e' ancora un esponenziale complesso con la stessa frequenza dell'ingresso.
L'ampiezza e la fase iniziale dell'uscita dipendono dalla risposta in frequenza *H(f)* del sistema LTI.

# Risposta in frequenza di sistemi reali (1)

Se il sistema LTI ha risposta all'impulso $h(t)$ reale, la risposta in frequenza $H(f)$ e' una funzione con simmetria complessa coniugata: $H(f) = H^*(-f)$ (come si verifica facilmente dalla definizione di $H(f)$). Dunque il modulo di $H(f)$ e' pari (simmetrico rispetto all'origine) e la fase di $H(f)$ e' dispari (antisimmetrica rispetto all'origine).



# Risposta in frequenza e banda passante

La risposta in frequenza *H(f)* e’ una funzione **complessa** della frequenza che dipende solo dalla risposta all’impulso del sistema *h(t).*

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ \exp\left\{-\,j2\pi\ ft\right\} dt$$

La risposta in frequenza *H(f)* consente d’introdurre il concetto di **banda passante** di un sistema LTI (tipicamente un canale di trasmissione).

Il modulo della risposta in frequenza avra’ valori piu’ elevati in una banda di frequenze (detta banda passante) e relativamente piu’ bassi alle altre frequenze.

All’uscita del sistema LTI, gli esponenziali complessi con frequenza compresa nella banda passante del sistema avranno ampiezza molto maggiore di quelli con frequenza esterna a tale banda. Si usa dire che i primi “passano” attraverso il sistema, mentre i secondi no.

# Trasformata di Fourier

L'operatore che consente di ottenere la risposta in frequenza *H(f)* a partire dalla risposta all'impulso del sistema *h(t),* viene detto **trasformata di Fourier.**

La trasformata di Fourier puo' essere calcolata per un generico segnale *x(t)*, non solo per la risposta all'impulso di un sistema LTI:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, \exp\{-j2\pi \, ft\} \, dt$$

L'operatore che consente di riottenere il segnale *x(t)* a partire dalla sua trasformata di Fourier *X(f)* viene detto **trasformata inversa di Fourier:**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi \, ft\} \, df$$

Si noti che la trasformata di Fourier e la sua inversa sono uguali, a parte il segno dell'esponente.

# Segnali come somma di esponenziali complessi

La trasformata inversa di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\left\{j2\pi \; ft\right\} df$$

ha la seguente interpretazione:

un qualsiasi segnale *x(t)* puo' essere scomposto nella somma (integrale) di esponenziali complessi le cui ampiezze (infinitesime) e fasi iniziali in funzione della frequenza sono date dalla trasformata di Fourier *X(f)* :

$$\text{Ampiezza}: \left|X(f)\right| df \qquad \text{Fase iniziale}: \angle X(f)$$

# Sistemi LTI: legame ingresso-uscita in frequenza

**1** - Se l'ingresso e' un esponenziale complesso $x(t) = A \exp\{ j\, 2\pi\, f\, t \}$, l'uscita e' $y(t) = H(f)\, A \exp\{ j\, 2\pi\, f\, t \}$

**2** - Un generico segnale $x(t)$ puo' essere scomposto nella somma di esponenziali complessi (di ampiezza infinitesima) del tipo $X(f) \exp\{ j\, 2\pi\, f\, t \}\, df$

**3** - L'uscita di un sistema LTI per un generico segnale d'ingresso $x(t)$ e' data dalla somma di esponenziali complessi $y(t) = H(f)\, X(f) \exp\{ j\, 2\pi\, f\, t \}\, df$

**4** - L'uscita $y(t)$, come tutti i segnali, puo' essere scomposta nella somma di esponenziali complessi del tipo $Y(f) \exp\{ j\, 2\pi\, f\, t \}\, df$

**Quindi:**

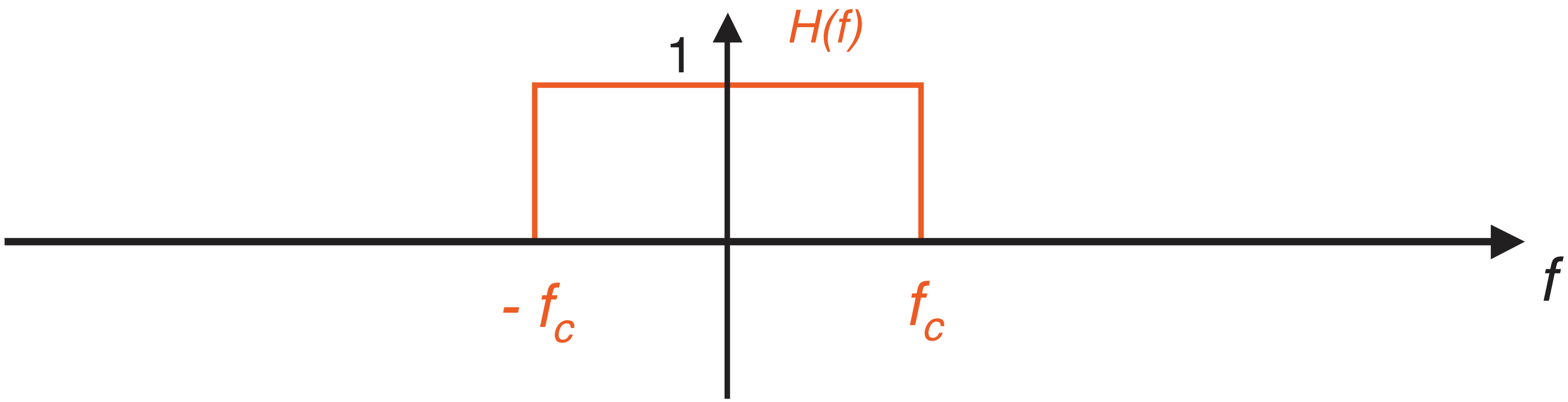
$$\boxed{Y(f) = H(f) X(f)}$$

Questo risultato corrisponde ad una importante proprieta' della trasformata di Fourier, che verra' ripresa nel seguito: la trasformata della convoluzione ( $y(t) = h(t) * x(t)$ ) e' il prodotto delle trasformate ( $Y(f) = H(f) X(f)$ ).

# Risposta in frequenza di un filtro passa-basso

Quando la risposta in frequenza *H(f)* ha ampiezza diversa da zero solo in una banda di frequenze simmetrica rispetto all'origine, il sistema LTI viene detto filtro passa-basso.

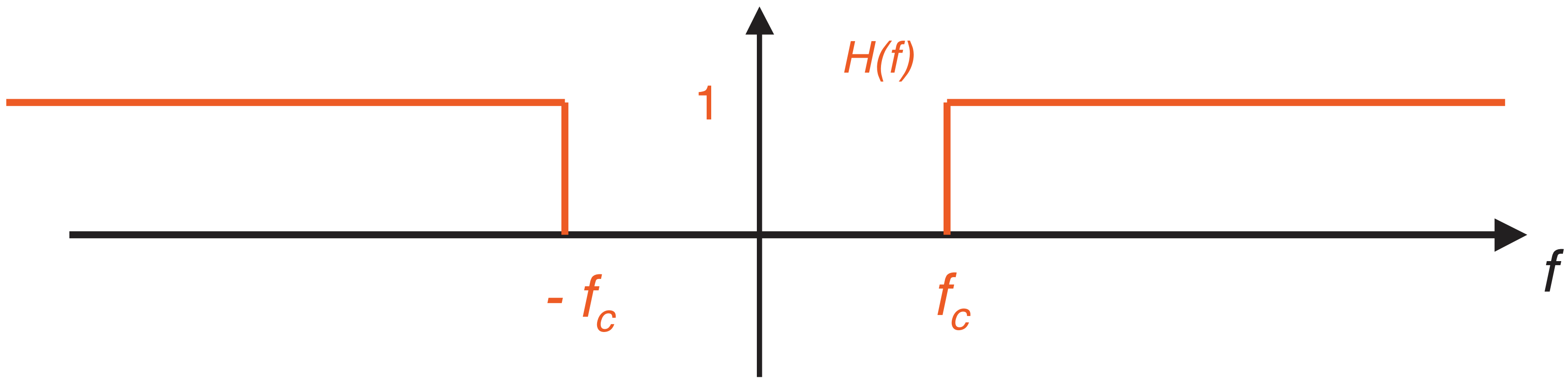
Un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio $f_c$ ha come risposta in frequenza un rettangolo di ampiezza unitaria e base $2f_c$ (viene detto ideale perche' in pratica non e' possibile realizzare una transizione netta da "banda passante" a "banda attenuata").



# Risposta in frequenza di un filtro passa-alto

Quando la risposta in frequenza *H(f)* ha ampiezza diversa da zero solo a frequenze superiori a $f_c$ (frequenza di taglio) e, simmetricamente, inferiori a $-f_c$ il sistema LTI viene detto filtro passa-alto.

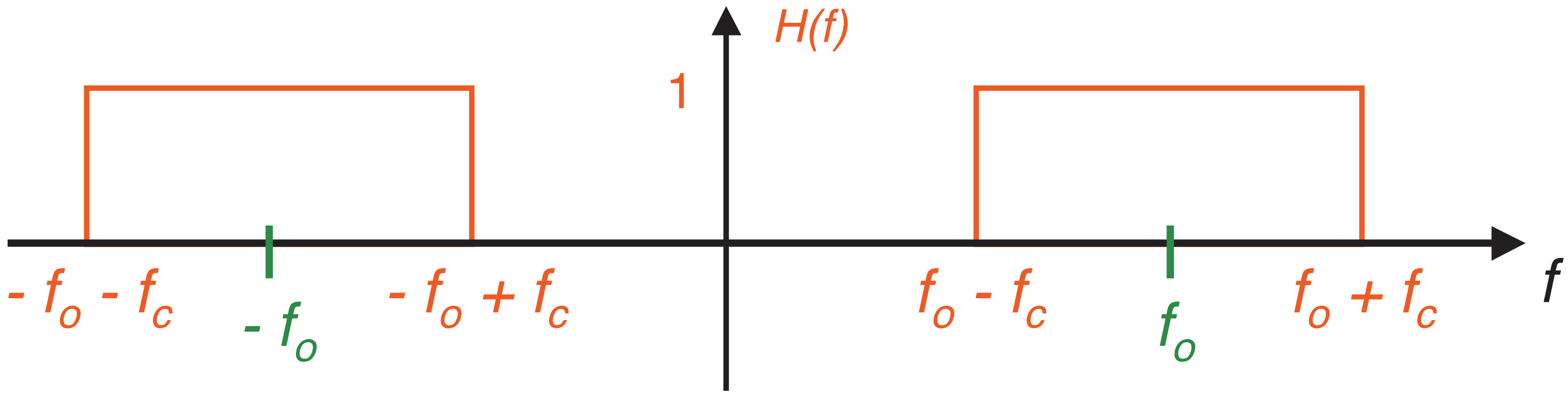
Un filtro passa-alto ideale con frequenza di taglio $f_c$ ha come risposta in frequenza una costante unitaria meno un rettangolo di ampiezza unitaria e base $2f_c$ (anche il filtro passa-alto ideale non e' realizzabile in pratica).



# Risposta in frequenza di un filtro passa-banda

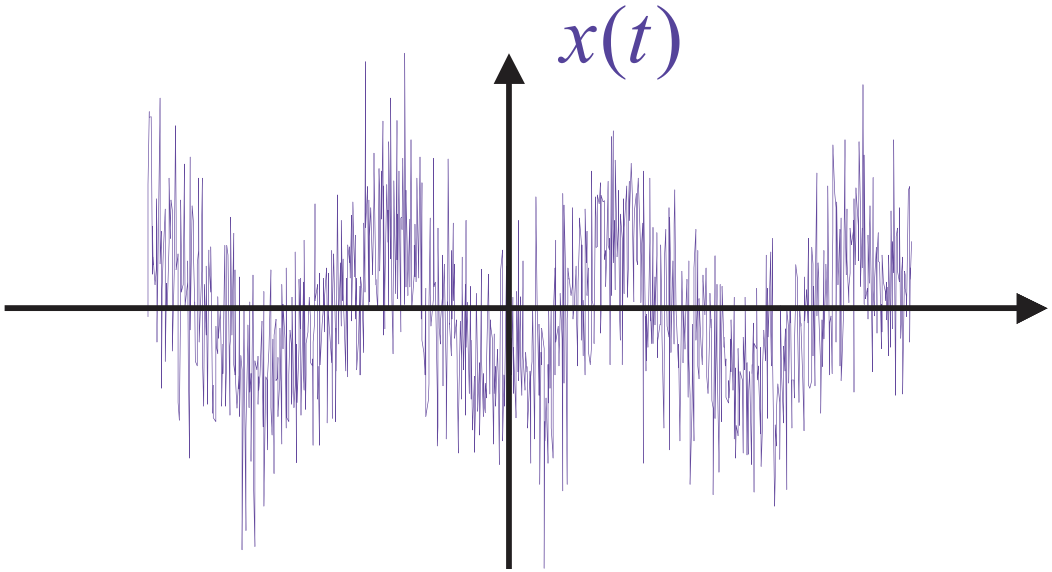
Quando la risposta in frequenza $H(f)$ ha ampiezza diversa da zero solo in due bande di frequenza centrate intorno alla frequenza $f_o$ (frequenza centrale) e, simmetricamente, intorno alla frequenza $-f_o$ il sistema LTI viene detto filtro passa-banda.

Un filtro passa-banda ideale con frequenza centrale $f_o$ e banda passante $2f_c$ ha come risposta in frequenza due rettangoli di ampiezza unitaria e base $2f_c$ centrati intorno alle frequenze $+f_o$ e $-f_o$ (anche il filtro passa-banda ideale non e' realizzabile).

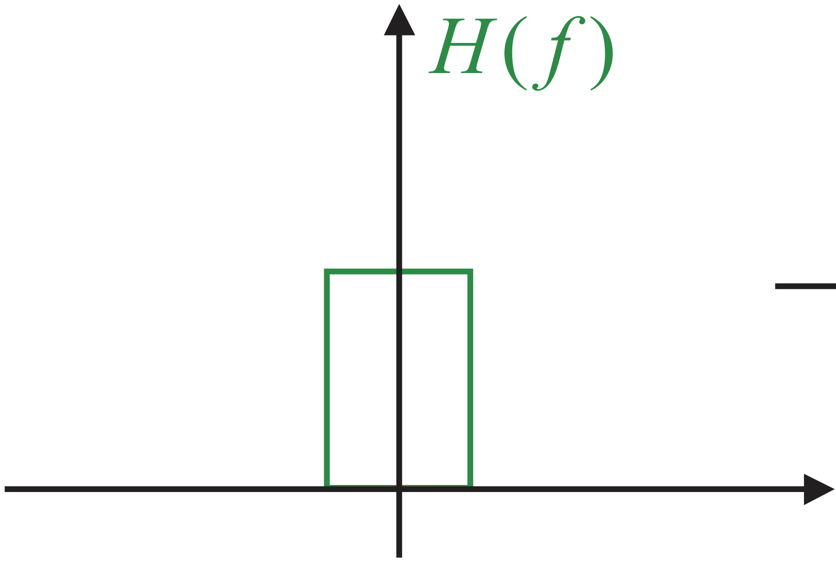


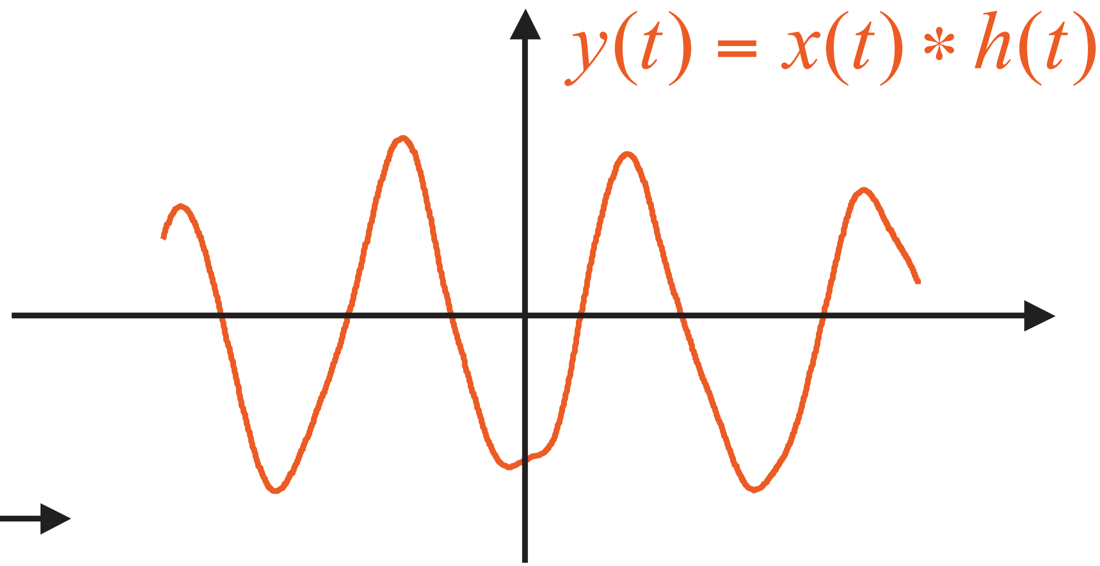
# Filtro passa-basso

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$




Le componenti del segnale rapidamente variabili nel tempo (ad alta frequenza) vengono eliminate dalla risposta in frequenza del filtro passa-basso

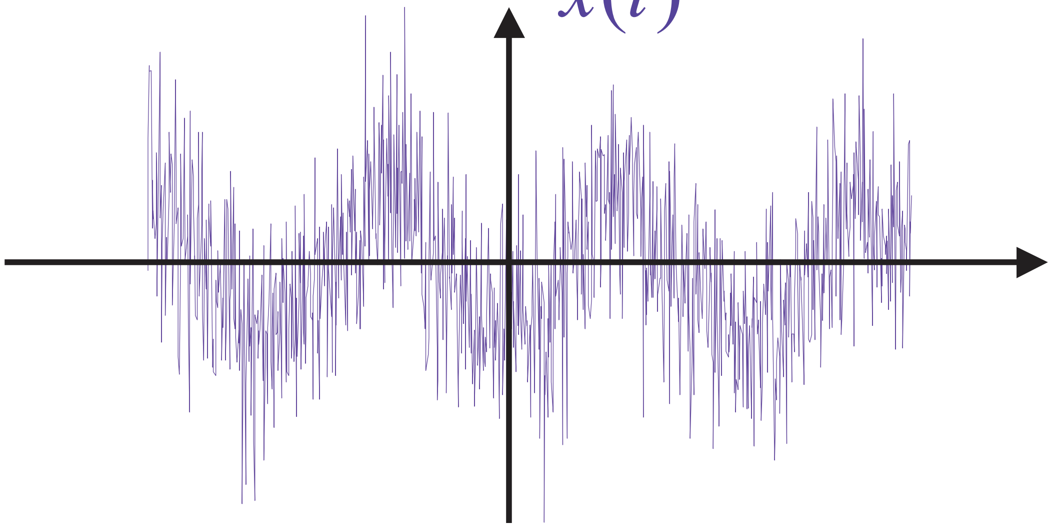


# Filtro passa-alto

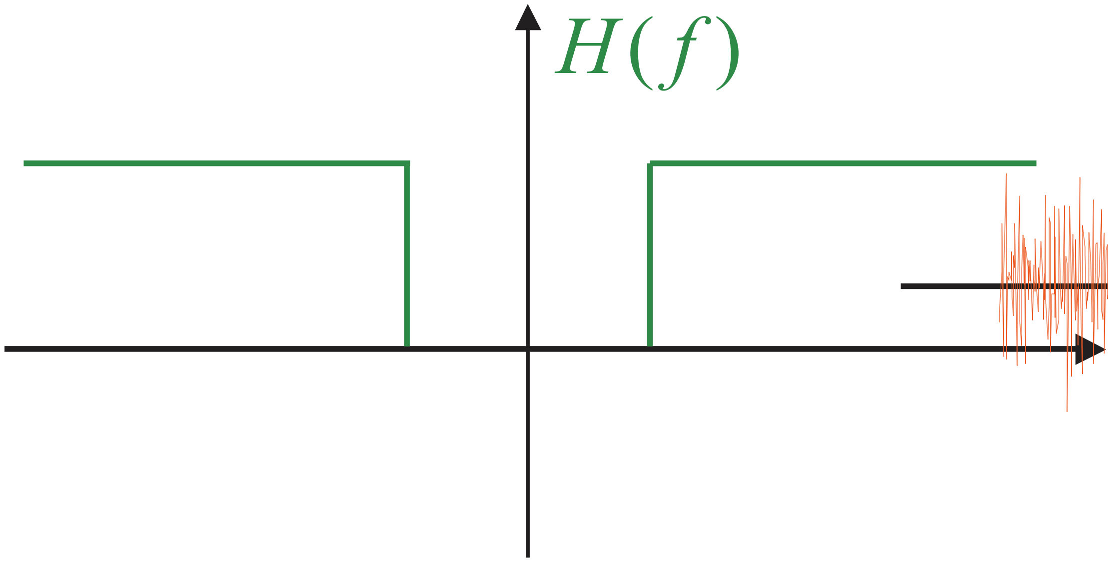
$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$x(t)$



Le componenti del segnale lentamente variabili nel tempo (a bassa frequenza) vengono eliminate dalla risposta in frequenza del filtro passa-alto

$H(f)$



$y(t) = x(t) * h(t)$