SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

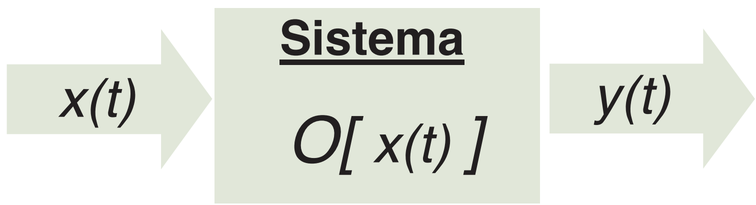
Definizione di sistema

Sistema:

Da un punto di vista fisico e' un dispositivo che modifica un segnale *x(t),* detto **ingresso**, generando il segnale *y(t),* detto **uscita**.

Da un punto di vista formale il segnale d'ingresso *x(t)* viene "manipolato" tramite un generico operatore matematico indicato con *O[.]*. Il risultato delle operazioni matematiche eseguite sull'ingresso e' il segnale d'uscita *y(t).*

Schema a blocchi



Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

Lineare: quando l'uscita generata dalla combinazione lineare di due o piu' ingressi e' uguale alla combinazione lineare delle uscite generate dai singoli ingressi

$ax_1(t)+bx_2(t)$ → **Sistema Lineare** $O[ax_1(t)+bx_2(t)]=aO[x_1(t)]+bO[x_2(t)]$ → $ay_1(t)+by_2(t)$

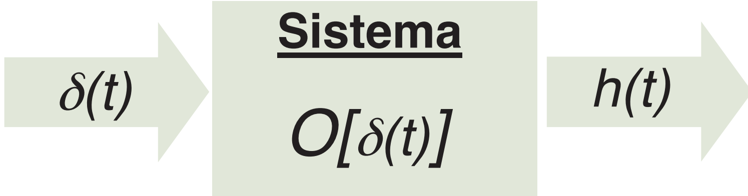
Tempo Invariante: quando l'uscita generata da un segnale ritardato e' uguale all'uscita generata dal segnale originale, ritardata della stessa quantita'.

$x(t-\tau)$ → **Sistema Tempo Invariante** $O[x(t-\tau)]$ → $y(t-\tau)$

Risposta all'impulso

Risposta all'impulso: e' l'uscita del sistema quando l'ingresso e' l'impulso. Viene solitamente indicata con il simbolo ***h(t)***

$$h(t) = O[\delta(t)]$$



Se il sistema e' tempo-invariante, la forma della risposta all'impulso non dipende dall'istante in cui si applica l'impulso. Quando l'ingresso e' un impulso anticipato o ritardato l'uscita e' uguale ad ***h(t)*** anticipata o ritardata:

$$h(t-\tau) = O[\delta(t-\tau)]$$

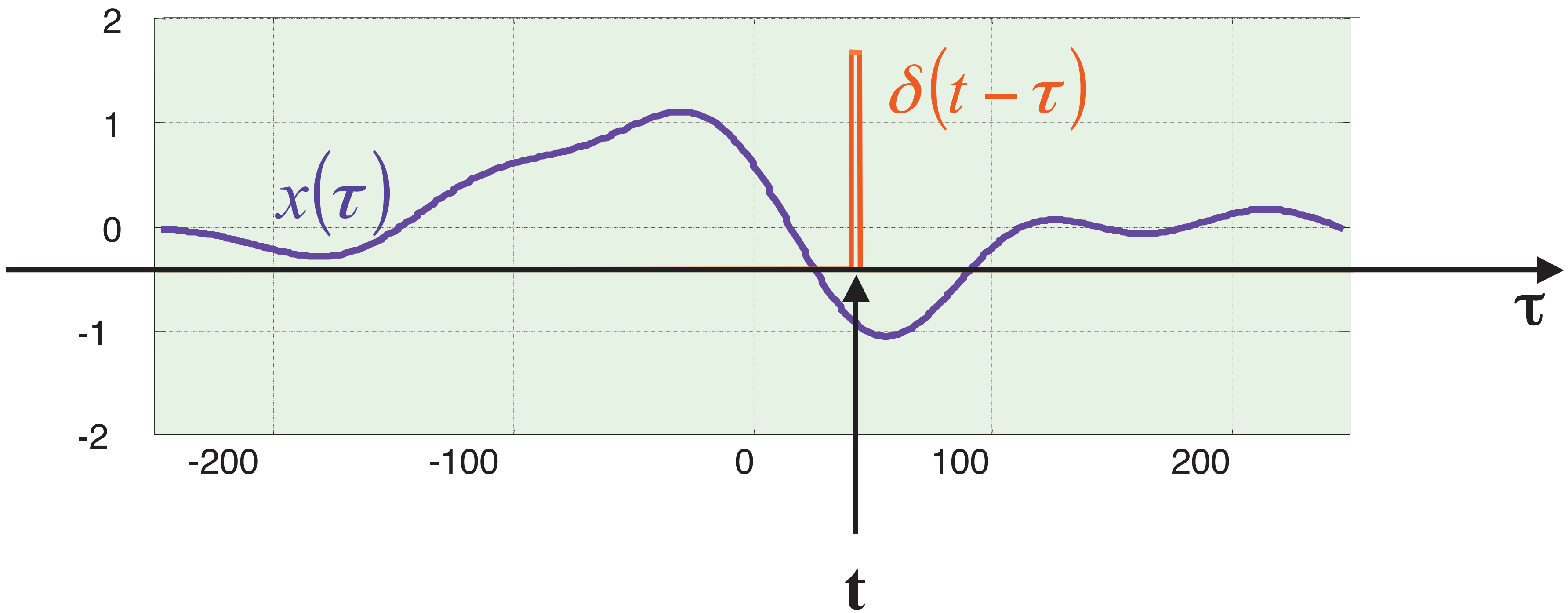
Se il sistema e' anche lineare, nota la risposta all'impulso e' possibile calcolare l'uscita del sistema quando l'ingresso e' una qualsiasi combinazione lineare d'impulsi:

$$y(t) = O\left[a\delta(t) + b\delta\left(t-\tau_1\right) + c\delta\left(t-\tau_2\right)\right] =$$
$$= ah\left(t\right) + bh\left(t-\tau_1\right) + ch\left(t-\tau_2\right)$$

Rappresentazione di un segnale come combinazione lineare di impulsi

Un qualsiasi segnale *x(t)* puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$



La convoluzione

Abbiamo visto che:

1 - Nota la risposta all'impulso, e' possibile calcolare l'uscita di un sistema LTI quando l'ingresso e' una qualsiasi combinazione lineare d'impulsi

2 - Un qualsiasi segnale *x(t)* puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi

Ne segue che:

$$\boxed{y(t)} = O[x(t)] = O\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ O[\delta(t-\tau)]d\tau =$$

$$\underbrace{\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ x(t-\tau)\ d\tau}}_{\text{integrale di convoluzione (o semplicemente convoluzione)}} = x(t) * h(t)$$

$*$ = simbolo della convoluzione

uscita = convoluzione tra ingresso e risposta all'impulso del sistema LTI

Causalità dei Sistemi L.T.I. (1)

Definizione:

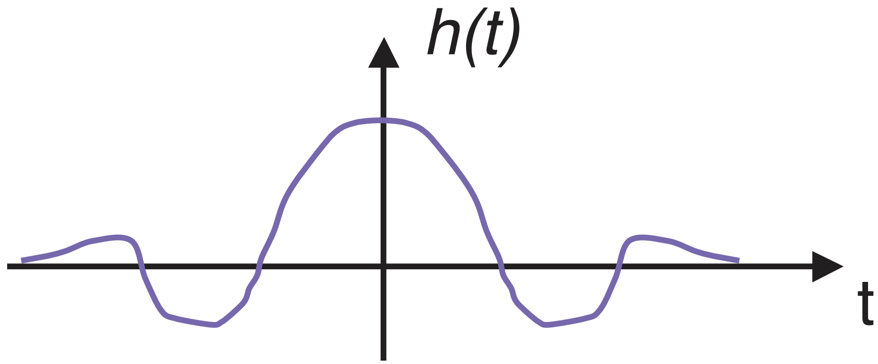
Un sistema L.T.I. è detto causale se l'uscita y(t) per un $t=\bar{t}$, dipende dai valori dell'ingresso x(t) solo per valori della variabile $t \leq \bar{t}$.
La condizione di causalità è molto importante se la variabile indipendente è il tempo: in questo caso un sistema fisico <u>deve</u> essere causale. Se ciò non fosse infatti il sistema sarebbe in grado di predire il futuro.

Condizione da rispettare per garantire la causalità:

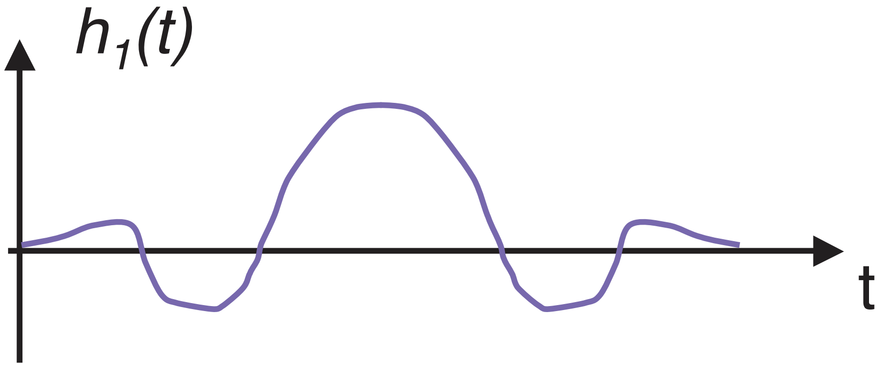
$$h(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

Causalità dei Sistemi L.T.I. (2)

Spesso nel seguito utilizzeremo risposte all'impulso del tipo:

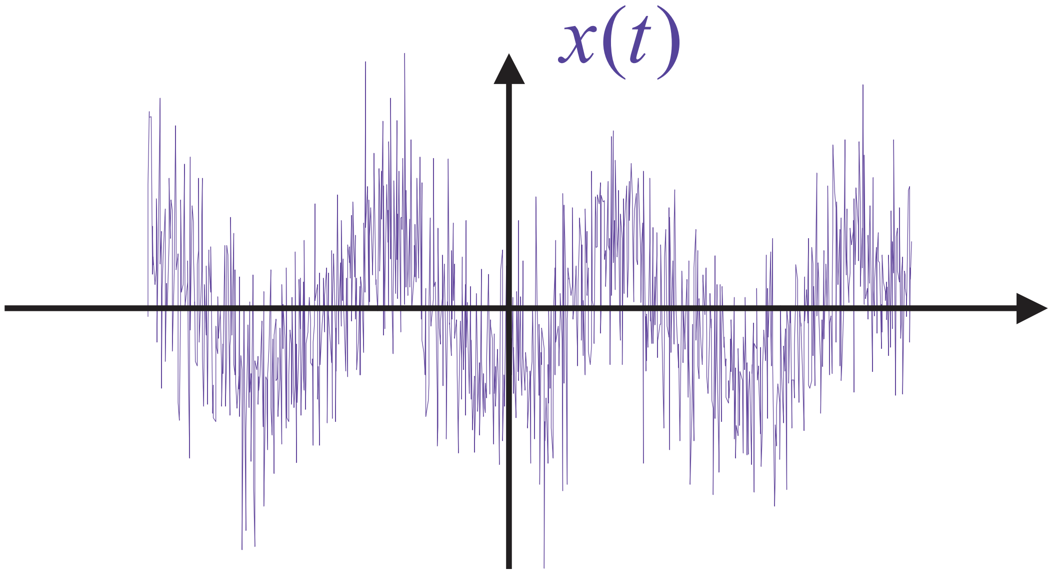


Questa risposta all'impulso <u>non</u> è causale: puo' essere resa causale attraverso opportuni troncamenti (nel tempo, se $h(t)$ si estende da $-\infty$ a ∞) e ritardi.



Utilizzare $h(t)$ invece che $h_1(t)$ significa trascurare (cioe' sottintendere) i ritardi necessari a rendere causale la risposta all'impulso.

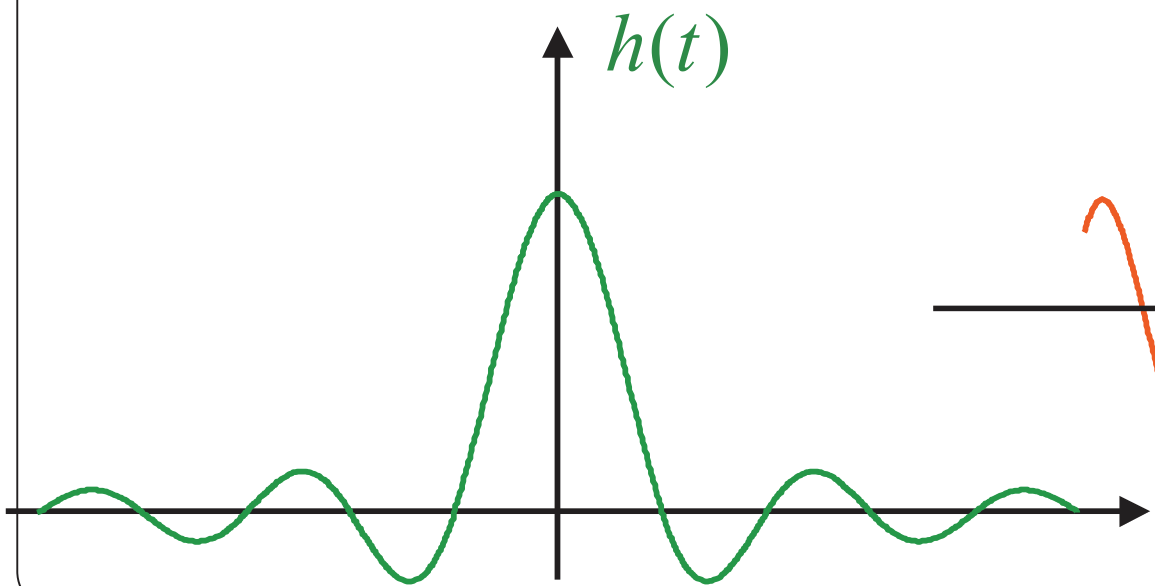
Effetti della convoluzione (filtro passa-basso)

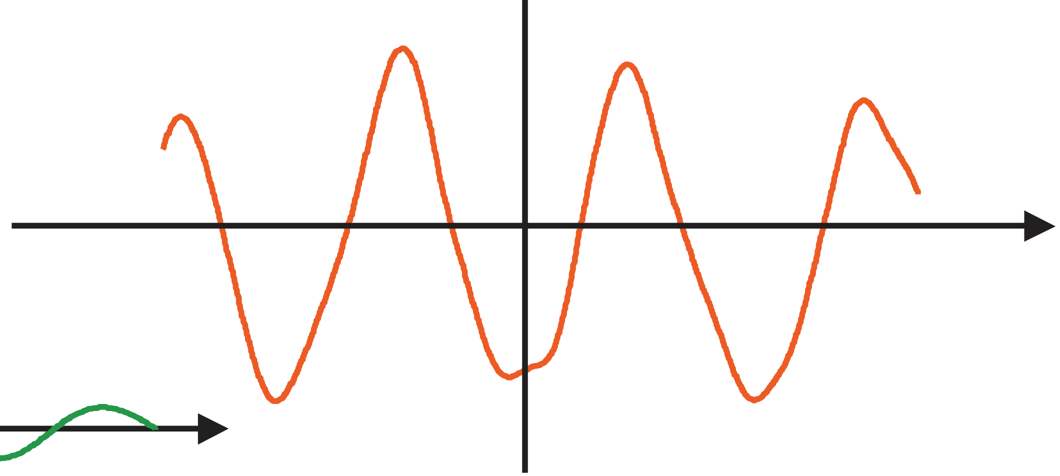


Le componenti del segnale rapidamente variabili nel tempo (ad alta frequenza) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all’impulso lentamente variabile nel tempo (filtro passa-basso)

Simbolo della convoluzione

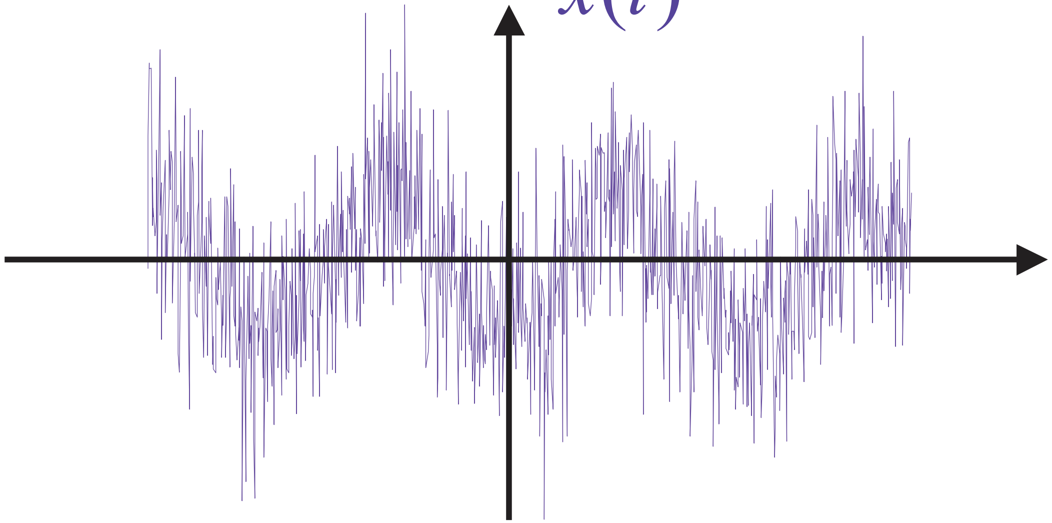
$$y(t) = x(t) * h(t)$$





Effetti della convoluzione (filtro passa-alto)

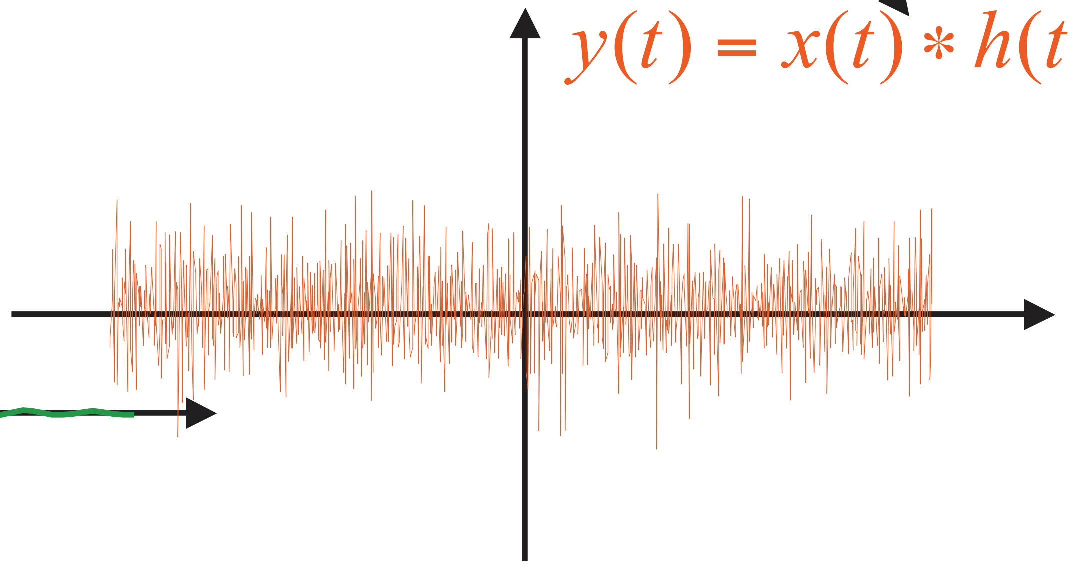
$x(t)$



Le componenti del segnale lentamente variabili nel tempo (a bassa frequenza) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all'impulso rapidamente variabile nel tempo (filtro passa-alto)

Simbolo della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



$h(t)$